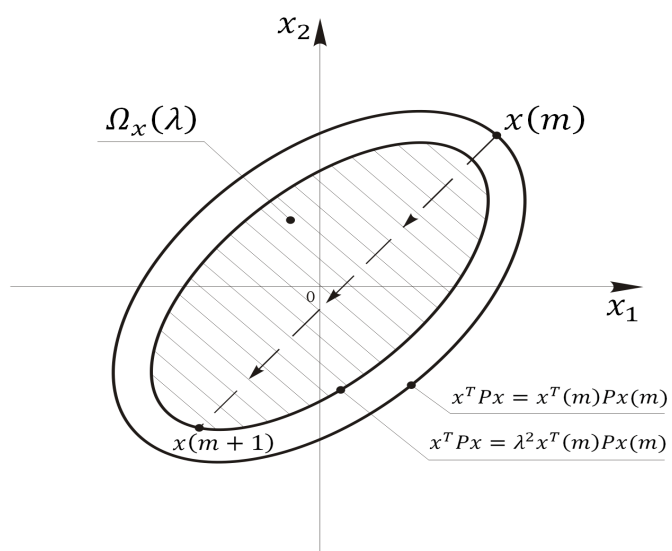


## ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ



Санкт-Петербург

2019

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

# **ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

**Учебное пособие**

**РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлениям подготовки 15.04.06, 27.04.03 , 27.04.04 в качестве учебного  
пособия для реализации основных образовательных программ высшего обра-  
зования магистратуры**



**Санкт-Петербург**

**2019**

Авторский коллектив: **Григорьев В.В., Быстров С.В., Бойков В.И., Болтунов Г.И., Мансурова О.К.**

Цифровые системы управления: Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2019. – 133 с.

**Рецензенты:**

Шаветов С.В., канд. техн. наук, доцент кафедры интеллектуальных технологий промышленной робототехники Университета ИТМО

В учебном пособии рассмотрены общие подходы к построению моделей цифровых объектов и дискретных процессов, анализ качества их поведения, современные методы аналитического конструирования регуляторов, идеология построения которых подобна созданию регуляторов для непрерывных объектов. Приведены примеры, демонстрирующие возможности применения рассмотренных процедур анализа и синтеза цифровых систем управления. Настоящее пособие является переработанным и дополненным изданием учебного пособия (2011 г.) тех же авторов.

Пособие предназначено для студентов технических университетов, обучающихся по направлениям магистерской подготовки 15.04.06 – «Мехатроника и робототехника», 27.04.03- «Системный анализ и управление», 27.04.04 – «Управление в технических системах». Пособие может быть полезно студентам других технических направлений подготовки, а также аспирантам, преподавателям вузов и специалистам, научная и практическая деятельность которых связана с решением вопросов исследования и проектирования цифровых систем управления.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2019

© Григорьев В.В., Быстров С.В., Бойков В.И., Болтунов Г.И., Мансурова О.К., 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Введение	5
В.1 Обобщенная функциональная схема системы с цифровым (дискретным) управлением	5
В.2 Принципы построения регуляторов для цифровых (дискретных) систем	7
В.2.1 Системы стабилизации	9
В.2.2 Следящие системы	12
1 Математические модели дискретных объектов и дискретных процессов внешних воздействий	18
1.1 Дискретизация процессов и моделей объектов управления на основе амплитудно-импульсной модуляции	18
1.2 Построение модели объекта управления с элементом амплитудно-импульсной модуляции и непрерывной линейной частью	21
1.3 Формы задания уравнений движения дискретного объекта (системы) в виде разностных уравнений	27
1.4 Дискретное преобразование Лапласа	32
1.5 Передаточные функции дискретных объектов	36
1.6 Передаточные функции замкнутых систем	39
2 Устойчивость цифровых (дискретных) систем	42
2.1 Классические виды устойчивости дискретных систем	42
2.2 Качественная экспоненциальная устойчивость дискретных систем	44
2.3 Метод Ляпунова для анализа свойства устойчивости дискретных систем	45
2.4 Уравнения Ляпунова для анализа свойства устойчивости линейных дискретных систем	48
2.5 Необходимые и достаточные корневые условия устойчивости дискретных систем	51
2.6 Уравнения Ляпунова как критерии расположения корней замкнутой системы в определенных областях комплексной плоскости внутри (вне) единичного круга с центром в начале координат	53
2.7 Виды стохастической устойчивости дискретных систем	55
2.8 Матричные неравенства и уравнения для линейных позитивных систем	58
2.9 Анализ переходной и установившихся составляющих динамических процессов при внешних воздействиях. Матричные коэффициенты ошибок	62

3 Аналитические методы построения регуляторов цифровых систем для объектов и внешних воздействий с измеряемыми состояниями	68
3.1 Построение регуляторов для систем стабилизации на основе принципа Беллмана. Основы и постановка задачи модального управления дискретными объектами	68
3.2 Задача модального управления	69
3.3 Решение задачи модального управления на основе принципа эталонной модели	70
3.4 Особенности задания матриц описания эталонной модели для дискретных систем	73
3.5 Синтез интегрального регулятора для систем с одним входом и выходом	76
3.6 Построение регуляторов со встроенной моделью	79
4 Аналитические методы построения регуляторов цифровых систем для объектов и внешних воздействий с ограничениями на измеряемые переменные	82
4.1 Устройство оценки полной размерности и способы проектирования	82
4.2 Устройство оценки пониженной размерности и способы проектирования	85
4.3 Проектирование динамического регулятора с устройством оценки полной размерности	87
4.4 Проектирование динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности	90
5 Системы пространственного слежения	95
5.1 Модели систем пространственного слежения	95
5.2 Синтез линейных регуляторов для системы пространственного слежения	101
5.3 Исследование режимов захвата и автосопровождения системы пространственного слежения	112
Заключение	122
Список использованных источников	123
Приложение А. Задания для расчетной (курсовой) работы	125

## **Предисловие**

Учебное пособие предназначено для углубленного изучения материала курса «Цифровые системы управления», читаемого студентам по направлению подготовки 27.04.04 «Управление в технических системах». Учебное пособие может быть рекомендовано в качестве дополнительного учебного материала студентам по направлениям подготовки 15.04.06 «Мехатроника и робототехника» и 27.04.03 «Системный анализ и управление» при изучении таких дисциплин, как «Современная теория систем управления» и «Моделирование и управление электромеханическими системами». Материал пособия направлен на формирование компетенций, связанных с применением современных теоретических и экспериментальных методов разработки математических моделей цифровых систем управления.

Учебное пособие целесообразно использовать в дополнение к лекционному материалу при самостоятельной работе студентов. В приложении к пособию приведены варианты расчетной работы, которая может выполняться как курсовая работа. Расчетная работа ориентирована на использование пакета программ MatLab Simulink. Выполнение работы и защита результатов направлены на закрепление пройденного теоретического материала и выработки навыков выполнения расчетов при разработке регуляторов для цифровых систем управления.

## **Введение**

### **В1 Обобщенная функциональная схема системы с цифровым (дискретным) управлением**

Окружающий нас мир представляет собой сложную, развивающуюся во времени и пространстве, открытую систему, включающую разнообразные, находящиеся во взаимодействии подсистемы: социальные, экономические, экологические, биологические, технические. Любая система (подсистема) развивается в соответствии с целью ее функционирования. Управление той или иной системой (подсистемой) осуществляется таким образом, чтобы достичь (приблизиться) к цели функционирования системы на основе анализа и обработки информации о текущих значениях измеряемых параметров системы, характеризующих динамику развития системы и ее отклонения от цели функционирования. Управление должно обеспечивать устойчивое развитие во времени системы (подсистемы) и обладать свойством адаптивности и робастности (грубости) к изменяющимся условиям внешней среды и эволюции цели управления.

Современное развитие компьютерных аппаратных средств, информационных сетей и технологий, телекоммуникаций и исполнительных устройств позволяет реализовывать сложные иерархические алгоритмы управления, включающие алгоритмы обработки информации, алгоритмы

идентификации объектов управления, робастные алгоритмы адаптации к изменению параметров объекта и внешних возмущающих воздействий, обеспечивающие устойчивое динамическое развитие системы и позволяющие достичь цели управления. Эффективное и качественное экономическое развитие ставит перед производством и управлением им новые задачи, а именно, создание интегрированных систем управления производством, включающим системы автоматизированного проектирования (САПР), автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУ ТП), автоматизированные системы управления производством (АСУП), а также автоматизированные системы управления качеством выпускаемой продукции. Все эти системы находятся во взаимодействии и образуют сложную иерархическую систему.

Развитие аналитических методов конструирования регуляторов для систем автоматического управления, ориентированных на использование ЭВМ в процессе проектирования, потребовало установления связи этих методов с качеством процессов синтезируемой системы. Если изначально эти методы гарантировали асимптотическую устойчивость, то последующее развитие позволило обеспечивать экспоненциальную устойчивость, тесно связанную с оценками быстродействия и запасом устойчивости (степенью устойчивости). Однако выполнение условий экспоненциальной устойчивости не всегда приводит к требуемым показателям переходных процессов САУ. Поэтому появилась необходимость получения более локальных условий и понятий устойчивости, связанных с усилением ограничений на свойства системы. Для линейных систем подобные ограничения вводились на области расположения желаемых корней замкнутой системы, что позволило установить связь методов аналитического конструирования регуляторов с корневыми показателями и привело к упрощению процедуры синтеза по требуемым показателям качества. В общем случае для нестационарных и нелинейных систем корневые методы анализа и синтеза являются недействительными. Однако наметившийся подход локализации корней линейной системы на основе прямого метода Ляпунова позволяет с помощью введения более локального понятия устойчивости, чем понятие экспоненциальной устойчивости, распространить подобный подход для анализа нестационарных и нелинейных систем с гладкими нелинейностями. Для этого вводится понятие качественной экспоненциальной устойчивости, являющейся сужением понятия экспоненциальной устойчивости благодаря введению дополнительных условий, ограничивающих значения скоростей изменения компонент вектора состояния системы. С помощью дополнительных условий удастся локализовать и свойства процессов системы, при этом качественно экспоненциально устойчивые системы отличаются меньшей колебательностью и большей «плавностью» процессов при сохранении возможности оценки быстродействия и придания запаса устойчивости, присущих экспоненциально устойчивым системам.

На рисунке В1 изображена обобщенная функциональная схема системы управления, состоящая собственно из технического объекта (ТО), которым следует управлять в соответствии с назначением его функционирования; исполнительного механизма (ИМ), изменяющего состояние  $x$  ТО при выполнении цели функционирования ТО; преобразователя информации (ПИ), вырабатывающего информацию о текущем состоянии ТО; задающего устройства, определяющего в сигнальном виде  $g$  желаемое поведение ТО, а именно, значения его выходных или регулируемых переменных  $y$ ; внешней среды (ВС), отражающей происхождение аддитивных и мультипликативных внешних воздействий  $f$  на систему и отдельные ее элементы. Основополагающим функциональным элементом системы управления является регулятор, позволяющий по текущей информации о состоянии объекта и информационным сигналам о желаемом поведении объекта в соответствии с целью функционирования ТО вырабатывать управляющие воздействия, поступающие на исполнительный механизм и приводящие состояния объекта к желаемым значениям. В цифровых системах управляющие воздействия вырабатываются на основе обработки информации об измерениях и желаемого поведения регулируемых переменных с помощью микроконтроллерной техники, или другими словами, регуляторы в таких системах строятся на основе микроконтроллеров.

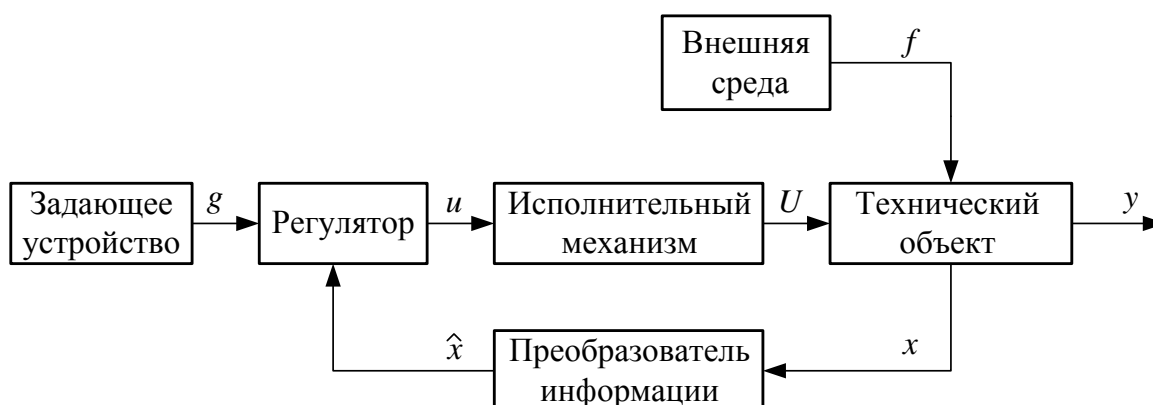


Рисунок В1 – Обобщенная функциональная схема системы управления

## В2 Принципы построения регуляторов для цифровых (дискретных) систем

Единый подход к синтезу регуляторов для систем непрерывного и дискретного действий основан на аналитических методах конструирования регуляторов, идеология использования которых позволяет с единых позиций проектировать структуры регуляторов. Специфика расчета параметров регулятора заключается только в использовании непрерывных или дискретных моделей объектов управления или систем. Следует отметить, что реализацию регуляторов для непрерывных объектов зачастую осу-

ществляют на микроконтроллерах, используя дискретный аналог непрерывного регулятора, полученного при проектировании.

В данном параграфе не будем останавливаться на особенностях математического описания объектов дискретного или непрерывного действия, а рассмотрим общие принципы формирования регуляторов для подобных объектов. Обобщение принципов построения регуляторов для объектов дискретного и непрерывного действия основано на их математическом описании с использованием понятия вектора состояния и принципа Беллмана, утверждающего, что управление есть функция состояния.

Под вектором состояния ОУ понимается такой минимальный набор переменных, знание которых в текущий момент времени позволяет при условии знания последующих внешних воздействий предсказать будущее поведение системы. Другими словами, вектор состояния ОУ есть память о прошлых воздействиях на объект, а знание вектора состояния позволяет определить дальнейшую стратегию управлений с целью достижения желаемой цели функционирования.

Формализуем взаимодействие ОУ и внешней среды. Объект управления ОУ характеризуется вектором состояния  $x$  ( $x \in R^n$ ), вектором управляющих воздействий  $u$  ( $u \in R^k$ ) и вектором регулируемых переменных  $y$  ( $y \in R^k$ ). Внешняя среда характеризуется вектором состояния  $\xi$  и выходными переменными, определяющими внешние возмущения  $f$ . Функциональные связи взаимодействия объекта управления и внешней среды отражены на рисунке В2.

В зависимости от принципа работы ОУ (непрерывность, или дискретность) и его математического описания, а также внешней среды, все функции состояний, выходов и управлений могут зависеть как от непрерывного времени  $t$ , так и от дискретного времени  $t = mT$ , где  $T$  – интервал дискретности,  $m = 0, 1, 2, \dots$  номер интервала дискретности.

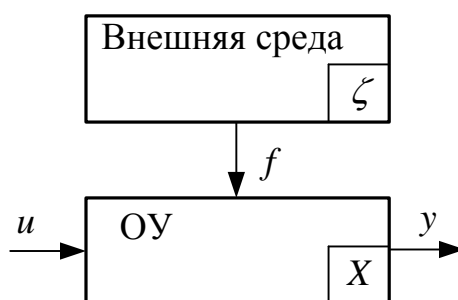


Рисунок В2 – Взаимодействие объекта управления и внешней среды

В дальнейшем будем считать, что ОУ полностью управляем, т.е. с помощью управления мы можем воздействовать на все собственные движения ОУ и изменять их в соответствии с требуемыми динамическими свойствами, предъявляемыми к замкнутой системе. Также будем считать, что

ОУ полностью наблюдаем, другими словами, в выходах (регулируемых переменных) ОУ проявляются все собственные движения ОУ и, как следствие, по выходным или измеряемым переменным можно восстановить все переменные вектора состояния. В дальнейшем обозначение  $y$  будем присваивать как регулируемым переменным, так и измеряемым.

Будем говорить, что ОУ – с полной информацией, если все переменные состояния  $x$  доступны для измерения, и с неполной информацией, если измеряется только часть переменных вектора состояния, т.е. количество измерений  $y$  меньше числа переменных состояния  $n$  [ $l < n$ ]. Будем называть внешнюю среду – с полной информацией, если все параметры вектора  $\xi$  доступны для измерения. Если измеряется только часть переменных состояния внешней среды или только внешние воздействия  $f$ , то внешнюю среду будем называть средой с неполной информацией.

## В2.1 Системы стабилизации

### а) Обобщенный пропорциональный регулятор (ОП регулятор).

На рисунке В3 представлена функциональная схема системы управления с обобщенным пропорциональным регулятором по переменным вектора состояния ОУ и внешней среды. При построении ОП регулятора предполагается, что ОУ и внешняя среда – с полной информацией, т.е. измеряются все переменные вектора состояния ОУ и внешней среды. Используя принцип Беллмана, управление формируется как функция состояний ОУ и внешней среды, а именно, для пропорционального регулятора, как линейная функция состояний ОУ и внешней среды. Отметим, что использование принципа Беллмана позволяет для замкнутой системы получить наперед заданные желаемые динамические свойства, другими словами, позволяет изменить (воздействовать) все собственные движения исходного ОУ.

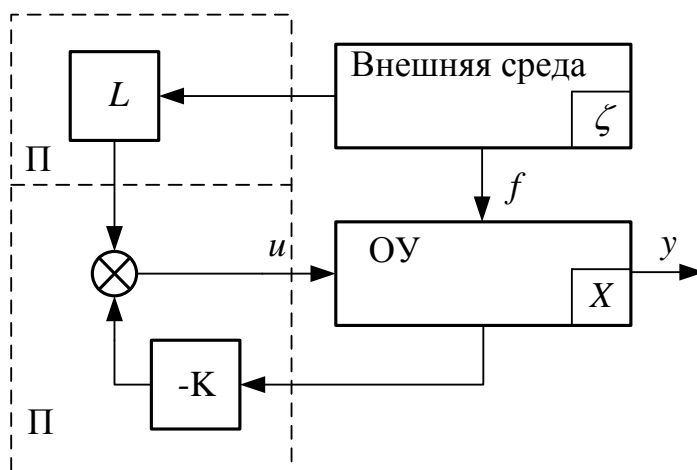


Рисунок В3 – Система стабилизации с обобщенным пропорциональным регулятором

Будем формировать управляющие воздействия как линейные функции вектора состояния ОУ и внешней среды в соответствии с уравнением

$$u = -Kx + L\xi,$$

где  $K$  – матрица размера  $k \times n$  линейных стационарных обратных связей (ЛСОС), элементы которой определяют коэффициенты отрицательных обратных связей по соответствующим переменным вектора состояний ОУ, а  $L$  – матрица размера  $k \times q$  прямых связей по переменным вектора состояния внешней среды, элементы которой определяют прямые связи по соответствующим переменным вектора состояния внешней среды. Задача синтеза ОП регулятора состоит в отыскании таких матриц ЛСОС  $K$  и матрицы прямых связей  $L$ , которые обеспечивают в системе стабилизации требуемые показатели качества. Матрица  $K$  ищется из условий обеспечения в замкнутой системе желаемых динамических свойств (качество и вид переходных процессов, тип устойчивости), а матрица  $L$  – требуемой точности отработки (подавления) внешних воздействий. Устройство, реализующее подобный закон управления, будем называть ОП регулятором по состояниям ОУ и внешней среды.

б) Обобщенный пропорционально-дифференциальный регулятор (ОПД регулятор).

Данный регулятор строится для ОУ с неполной информацией, когда измеряются только компоненты  $y$  ( $y \in R^k, k < n$ ), т.е. измеряется только часть переменных состояния или их линейная комбинация, причем количество измерений меньше, чем количество переменных вектора состояний ОУ. При этом полагается, что внешняя среда – с полной информацией. Использование принципа Беллмана при формировании управляющих воздействий как функций состояния позволяет данную идеологию провести только для внешних воздействий. Для того чтобы с помощью управляющих воздействий в замкнутой системе была возможность достижения наперед заданных желаемых динамических свойств, будем формировать управление  $u$  не как функцию переменных состояния ОУ, а как функцию оценок переменных вектора состояния ОУ. Под вектором оценки вектора состояния ОУ понимается такой вектор, который с течением времени стремится к оцениваемому вектору. Устройство, представляющее динамическую систему, которое по текущей информации об измеряемых переменных  $y$  и текущих значениях управляющих воздействий вырабатывает вектор оценки, называют устройством оценки. Другими словами, под устройством оценки будем понимать устройство, которое по текущему значению измеряемых переменных  $y$  и управляющему воздействию  $u$  вырабатывает вектор оценки  $\hat{x}$ , который с течением времени стремится к вектору состояния  $x$ . Схема системы стабилизации показана на рисунке В4.

Будем строить регулятор как линейную функцию переменных состояния внешней среды и оценок вектора состояния ОУ, которые вырабатыва-

ет устройство оценки. В этом случае управляющие воздействия формируются как линейная функция компонент вектора оценок вектора состояния ОУ и линейная функция компонент вектора состояния внешней среды

$$U = -K\hat{x} + L\xi,$$

где  $K$  – матрица размера  $k \times n$  линейных стационарных обратных связей (ЛСОС), элементы которой определяют коэффициенты отрицательных обратных связей по соответствующим переменным вектора оценок состояний ОУ;  $L$  – матрица размера  $k \times q$  прямых связей по переменным вектора состояния внешней среды, элементы которой определяют прямые связи по соответствующим переменным вектора состояния внешней среды. Совокупность устройства оценки вектора состояния и устройства перемножение вектора оценки на матрицу  $K$  ЛСОС реализует регулятор, который будем называть обобщенным ОПД регулятором, так как устройство оценки эквивалентно введению дифференцирующих связей в закон управления.

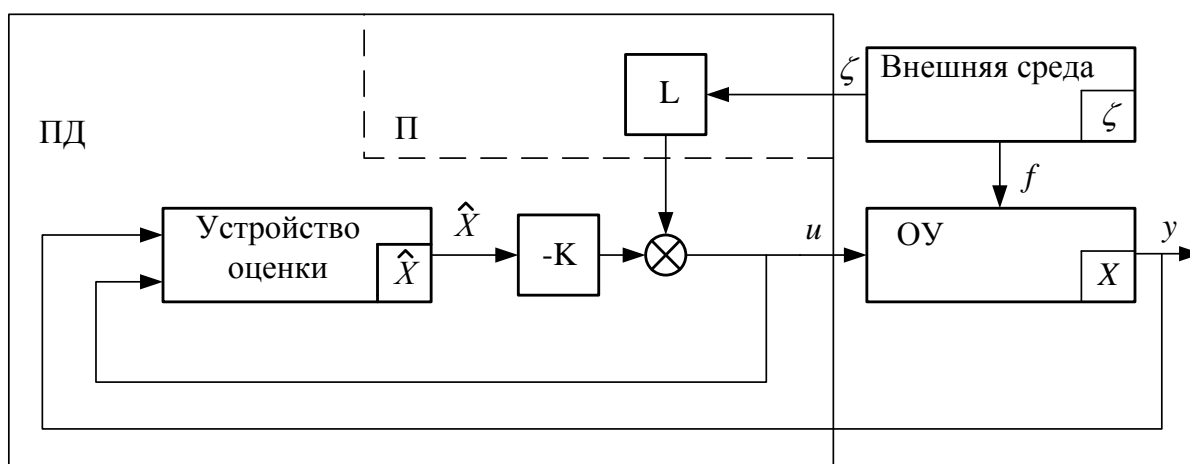


Рисунок В4 – Система стабилизации с обобщенным ПД- регулятором

в) Обобщенный ОПД регулятор по оценкам состояния ОУ и оценкам состояния внешней среды.

В этом случае ОУ – с неполной информацией. Измеряется только часть переменных вектора состояния или их линейная комбинация, причем количество измерений меньше числа переменных вектора состояния ОУ ( $y \in R^k [k < n]$ ). Внешняя среда – также с неполной информацией. Количество измерений меньше, чем количество переменных вектора состояния внешней среды, то есть измеряемые переменные таковы, что  $f \in R^l, [l < q]$ .

Строится регулятор, вырабатывающий управление как линейную функцию оценок вектора состояния ОУ и оценок вектора состояния внешней среды:

$$U = -K\hat{x} + L\hat{\xi}$$

где  $K$  – матрица размера  $k \times n$  линейных стационарных обратных связей (ЛСОС), элементы которой определяют коэффициенты отрицательных обратных связей по соответствующим переменным вектора оценок состояний ОУ;  $L$  – матрица размера  $k \times q$  прямых связей по переменным вектора оценок состояния внешней среды, элементы которой определяют прямые связи по соответствующим переменным вектора оценок состояния внешней среды. Схема системы стабилизации с обобщенным ОПД регулятором с устройствами оценки по состояниям ОУ и внешней среды показана на рисунке В5.

## В2.2 Следящие системы

а) Рассмотрим ОУ с полной информацией и внешнюю среду с полной информацией, которая порождает задающие воздействия  $g$ , определяющие либо желаемое поведение регулируемых переменных  $y$ , либо воздействия, характеризующие поведение внешних объектов, координаты которых требуется отслеживать.

В дальнейшем будем полагать, что количество входов  $g$  ( $g \in R^k$ ) и выходов  $y$  совпадает, другими словами, система содержит  $k$  каналов. При этом вектор ошибки между задающими и регулируемыми переменными определяется соотношением

$$e = g - y,$$

где вектор ошибки имеет размерность, совпадающую с размерностями векторов задающих воздействий и регулируемых переменных.

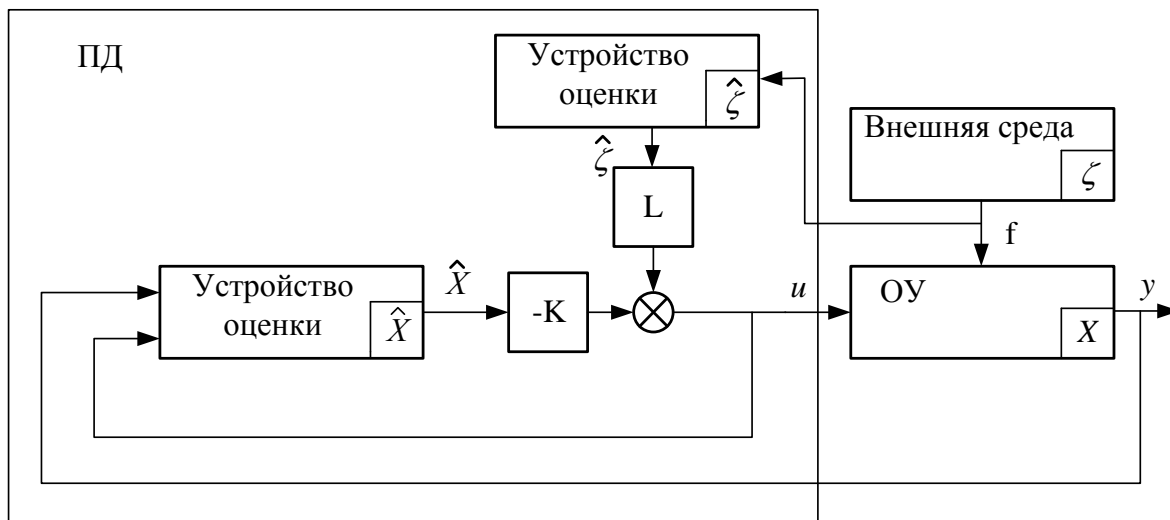


Рисунок В5 – Система стабилизации с обобщенным ОПД регулятором с устройствами оценки по состояниям ОУ и внешней среды

Предполагается, что измеряется ошибка слежения  $e$ , а также часть переменных состояния внешней среды, дополняющих задающие воздействия  $g$  до полного вектора состояния внешней среды

$$\xi = \begin{bmatrix} g \\ \bar{\xi} \end{bmatrix}, g \in R^k; \xi \in R^q; \bar{\xi} \in R^{q-k},$$

Предполагается, что измеряется часть переменных вектора состояния  $\bar{x}$  ОУ, которая в совокупности с регулируемыми переменными определяет вектор состояния ОУ,

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}, x \in R^n; y \in R^k; \bar{x} \in R^{n-k}.$$

Для следящей системы обобщенный пропорциональный регулятор формируется в соответствии с уравнениями

$$u = k_1 e - \bar{K} \bar{x} + K_q g + \bar{K}_q \bar{\xi},$$

где  $k_1$  – матрица размера  $k \times k$  коэффициентов передачи по вектору ошибки;  $\bar{K}$  – матрица линейных стационарных обратных связей по переменным вектора состояния  $\bar{x}$ ;  $K_q$  – матрица размера  $k \times k$  коэффициентов передачи по задающим воздействиям;  $\bar{K}_q$  – матрица прямых связей по измеряемым переменным состояния внешней среды. Формирование управляющих воздействий, выраженных через составные вектора состояний внешней среды, определяется уравнением

$$u = k_1 q - k_1 y + k_q q + \bar{K}_q \bar{\xi} - \bar{K} \bar{x} = [k_1 + k_q, \bar{K}_q] * \begin{bmatrix} q \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} - [k_1, \bar{K}] * \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

Используя обозначения

$$L = [k_1 + k_q, \bar{K}_q],$$

$$K = [k_1, \bar{K}],$$

формирование управляющих воздействий можно записать в более простой форме

$$u = -Kx + L\xi,$$

поэтому проектирование подобного регулятора заключается в отыскании таких матриц линейных стационарных связей  $K$  и матрицы прямых связей  $L$ , которые обеспечивают в замкнутой системе желаемые показатели качества переходных процессов и требуемые показатели по точности для заданного класса задающих воздействий.

Устройство, реализующее подобное управляющее воздействие, является обобщенным пропорциональным ОП регулятором по переменным состояния ОУ и переменным состояния задающего воздействия. Схема следящей системы с обобщенным пропорциональным регулятором по состояниям ОУ и внешней среды показана на рисунке В6.

б) Обобщенный ОПД регулятор для ОУ с полной информацией, при задающем воздействии с неполной информацией, когда измеряется лишь ошибка между задающими воздействиями и регулируемыми переменными ОУ.

В рассматриваемом случае предполагается, что измеряется ошибка между задающими воздействиями и регулируемыми переменными ОУ,

$$e = g - y, e \in R^k,$$

и измеряются переменные составного вектора состояния  $\bar{x}$  ( $\bar{x} \in R^{n-k}$ ),

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}, x \in R^n; y \in R^k; \bar{x} \in R^{n-k}.$$

Составной вектор состояния задающих воздействий может быть представлен в виде

$$\xi_q = \begin{bmatrix} g \\ \bar{\xi}_q \end{bmatrix}, \xi \in R^q; \bar{\xi}_q \in R^{q-k}; g \in R^k,$$

причем полагается, что вектор задающих воздействий  $g$  измеряется.

Управляющие воздействия для ОПД регулятора формируются на основе следующих соотношений:

$$U = k_1 e - \bar{k} \bar{x} + L_q \hat{\xi}_q q = k_1 q - k_1 y - \bar{k} \bar{x} + L_q \hat{\xi},$$

где  $k_1$  – матрица размера  $k \times k$  коэффициентов передачи по ошибке;  $\bar{k}$  – матрица коэффициентов линейных стационарных обратных связей ЛСОС по измеряемым переменным вектора состояния ОУ.

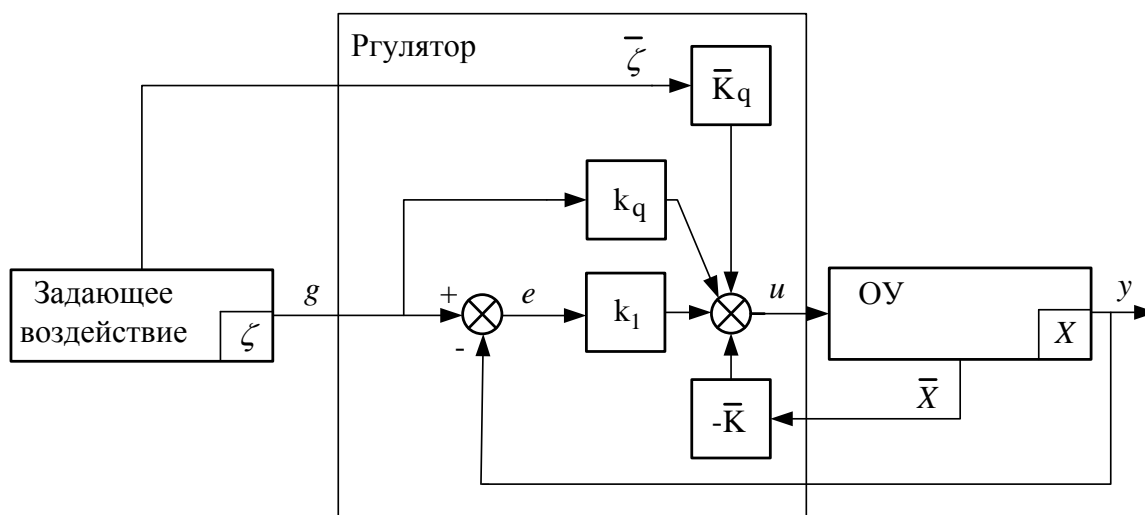


Рисунок В6 – Следящая система с обобщенным пропорциональным регулятором по состояниям ОУ и внешней среды

Матрица  $L_q$  – матрица размера  $k \times (q-k)$  прямых связей,

$$L_q = [k_1, L_q]$$

включает добавки в управляющее воздействие оценки по части переменных вектора состояния задающего воздействия ( $\hat{\xi}$  – вектор оценки  $\bar{\xi}$ ):

$$\hat{\xi}_q = \begin{bmatrix} q \\ \hat{\xi}_q \end{bmatrix}.$$

Устройство, вырабатывающее подобное управляющее воздействие, будем называть обобщенным пропорционально дифференциальным (ОПД) регулятором по оценкам вектора состояния внешней среды и обобщенным пропорциональным регулятором (ОП) по измеряемым состояниям ОУ. Схема следящей системы показана на рисунке В7.

в) Регулятор со встроенной моделью внешнего воздействия.

Регулятор со встроенной моделью внешнего воздействия позволяет получить нулевую ошибку в установившемся режиме на заданный класс внешних воздействий, описание которых определяет наиболее существенные воздействия на систему. Предполагается, что эти воздействия описываются линейными автономными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, которые получены на основе анализа их происхождения и физических законов, положенных в основу их функционирования.

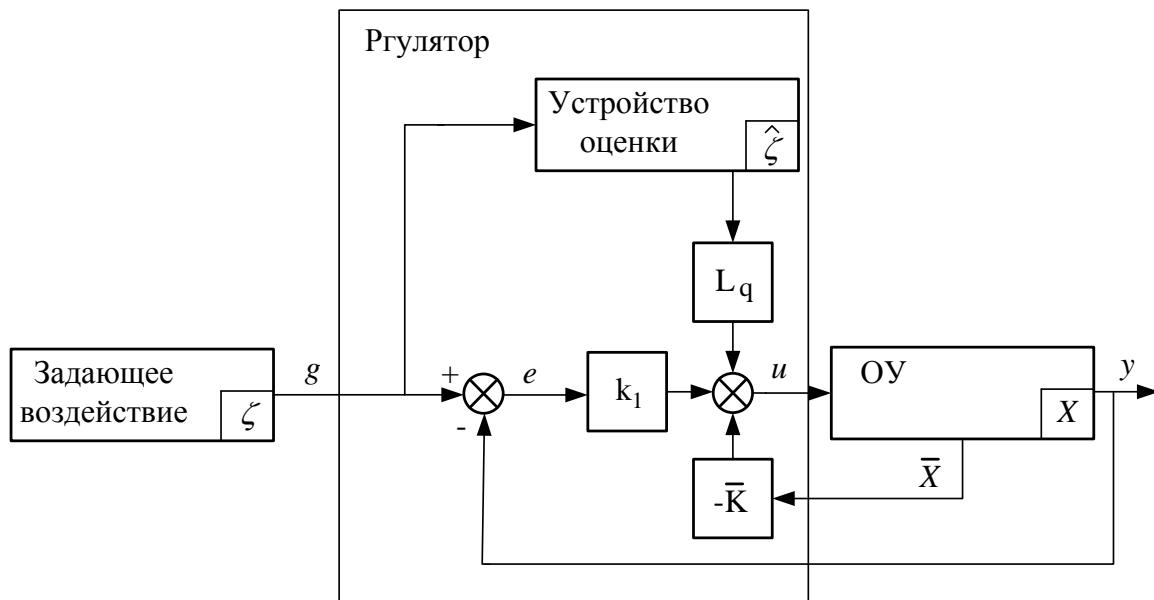


Рисунок В7 – Следящая система с ОПД регулятором по оценкам вектора состояния внешней среды и ОП регулятором по состояниям ОУ

Рассмотрим случай, когда по входу измеряется только задающее воздействие, а ОУ – с полной информацией, но измеряется:

$$\bar{x} : x = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}, \bar{x} \in R^{n-k}; e = q - y; e \in R^k.$$

В этом случае встроенная модель совпадает по описанию с моделью задающего воздействия, где  $z$  – вектор состояния встроенной модели по размерности совпадающий с вектором состояния задающего воздействия  $g$ :

$$U = k_1 e + k_z z - \bar{k} \bar{x} = k_1 q - k_1 y + k_z z - \bar{k} \bar{x} = k_1 q + k_z z - kx,$$

$$K = [k_1, \bar{k}],$$

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix},$$

где  $k_1 - [k \times k]; k_z - [k \times q]$  – матрицы коэффициентов передачи по соответствующим переменным.

Регулятор со встроенной моделью в случае обеспечения устойчивости позволяет получить в замкнутой системе нулевую установившуюся ошибку на задающее воздействие. Будем называть такой регулятор обобщенным пропорционально-интегральным регулятором (ОПИ регулятором). Схема следящей системы с ОПИ регулятором показана на рисунке В8. В частном случае, для следящих систем с одним входом и выходом, если описание встроенной модели задается интегрирующим элементом (постоянные воздействия), то получаем классический регулятор с интегральной связью по управлению.

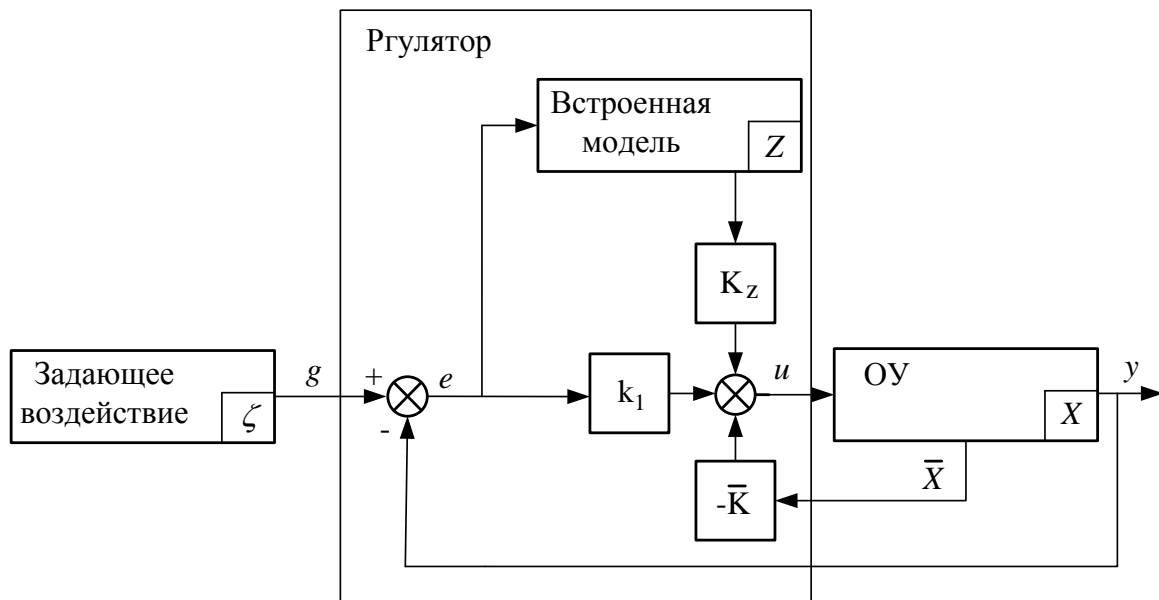


Рисунок В8 – Следящая система с обобщенным ОПИ- регулятором со встроенной моделью

г) Регулятор со встроенной моделью для объекта управления с неполной информацией.

В данном случае полагается, что задающее воздействие и ОУ с неполной информацией. Измеряется ошибка между задающими воздействиями и регулируемыми (измеряемыми) переменными ОУ

$$e = q - y; e \in R^k.$$

Составной вектор состояния объекта

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}; z \in R^q,$$

где  $y$  – вектор регулируемых (измеряемых) переменных;  $\bar{x}$  – вектор размерности  $n-k$  ( $\bar{x} \in R^{n-k}$ ), содержащий компоненты вектора состояния, которые не доступны для измерения.

Уравнение формирования управляющих воздействий обобщенного регулятора со встроенной моделью и обобщенным пропорционально-дифференциальным регулятором по состоянию ОУ принимает вид

$$U = k_1 e + K_z z - \bar{k} \hat{x} = k_1 q - k_1 y + K_z z - \bar{k} \hat{x} = k_1 q + K_z z - K \hat{x},$$

где  $K = [k_1, \bar{k}]$ ;  $\hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{\bar{x}} \end{bmatrix}$ ;  $k_1$  – матрица размера  $k \times k$ ;  $K_z$  – матрица размера  $k \times q$ .

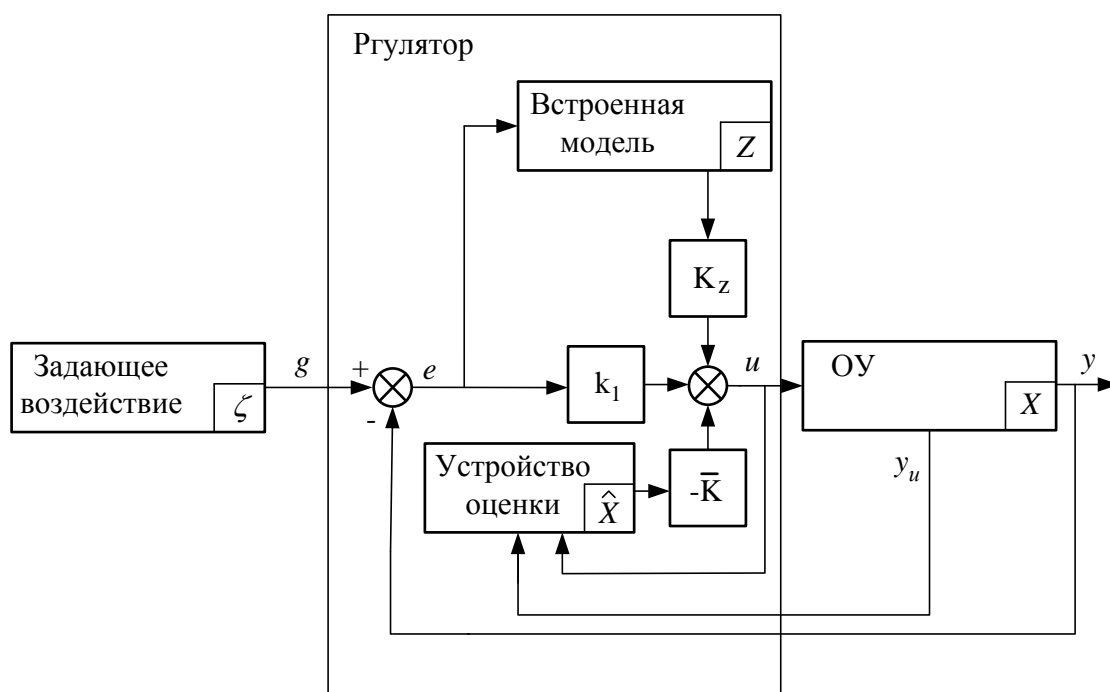


Рисунок В9 – Следящая система с обобщенным регулятором со встроенной моделью ОПИД и ОПД регулятором по состояниям объекта

Встроенная модель имеет то же самое математическое описание, что и модель задающего воздействия. Схема следящей системы с обобщенным регулятором со встроенной моделью ОПИД и ОПД регулятором по состояниям объекта показана на рисунке В9.

Для всех случаев задача синтеза регулятора состоит в определении:

- матриц обратных связей;
- матриц прямых связей;
- матриц коэффициента передачи по ошибке;
- матриц по состоянию встроенной модели;
- параметров устройств оценок компонент векторов состояния объекта или внешнего воздействия, которые обеспечивают в замкнутой системе требуемые показатели качества переходных процессов и точностные показатели качества.

Приведенные регуляторы имеют одинаковые функциональные схемы для непрерывных и дискретных случаев.

## **1 Математические модели дискретных объектов и дискретных процессов внешних воздействий**

### **1.1 Дискретизация процессов и моделей объектов управления на основе амплитудно-импульсной модуляции**

Любая система автоматического управления состоит из набора элементов, определяющих функционирование системы. Для каждого из элементов системы связь между входной и выходной переменными описывается алгебраическими, дифференциальными, разностными уравнениями, либо уравнениями в частных производных. Под дискретными системами будем понимать такие системы, в структуре которых имеет место хотя бы один элемент, для которого непрерывному изменению входного сигнала соответствует дискретное по времени изменение выходного сигнала. Так, для регулятора, который реализуется на микроконтроллере, требуется алгоритм, заданный в виде рекуррентного соотношения с дискретным временем (разностного уравнения). Получение разностного уравнения может производиться по непрерывной модели регулятора, путем замены дифференциальных уравнений разностными [8, 18]. Возможно получение разностного уравнения для описания регулятора по дискретной модели исходного ОУ на основе аналитических методов проектирования дискретных регуляторов.

Рассмотрим структурный элемент системы с входной  $x_1$  и выходной  $x_2$  переменными, графическое изображение которого показано на рисунке 1.1. Будем говорить, что элемент – дискретного принципа действия, если при непрерывном изменении входной переменной выходная переменная

изменяется только в дискретные моменты времени. Для элемента дискретного принципа действия характерно, что если изменение входной переменной описывается непрерывной функцией  $x_1(t)$ , то изменение выходной переменной описывается функцией  $x_2(t)$ , значения которой изменяются только в дискретные моменты времени  $t=mT$ , где  $T$  – интервал дискретности, а  $m=0,1,2,\dots$  – целое число, определяющее номер интервала дискретности. На рисунке 1.2. показан пример экстраполяции дискретных значений входного сигнала с периодом квантования  $T$  (запоминающий элемент).



Рисунок 1.1 – Структурный элемент системы с входной и выходной переменными:  $x_1$  – входная переменная, а  $x_2$  – выходная переменная

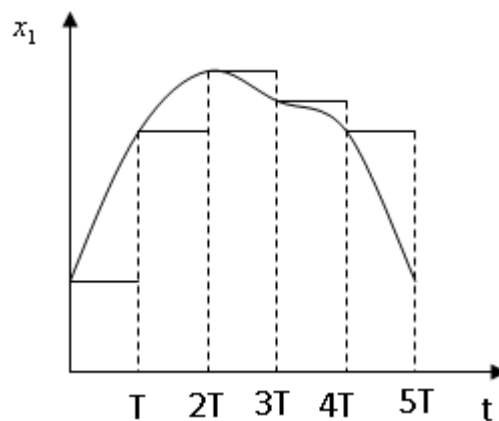


Рисунок 1.2 – Экстраполяция нулевого порядка значений входного сигнала, выбираемых с периодом квантования  $T$

Рассмотрим уравнение экстраполяции нулевого порядка для произвольного момента времени  $t$  на интервале времени  $mT \leq t < (m+1)T$  :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(mT), \\ t &= mT + \tau, \\ 0 &\leq \tau < T, \\ x_2(mT + \tau) &= x_1(mT). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Элемент, описание которого задается уравнением (1.1), называют запоминающим элементом или экстраполятором нулевого порядка.

Рассмотрим общую ситуацию амплитудно-импульсной модуляции, когда имеет место устройство, генерирующее импульсы определенной формы и заданной длительности с постоянным интервалом дискретности и

амплитудой, пропорциональной значению входного сигнала в предшествующий момент времени. Рассматриваемая ситуация иллюстрируется рисунком 1.3.

Зададим описание импульса, который имеет место на каждом интервале дискретности  $0 \leq \tau < T$ . Положим, что форма нормированного импульса задается функцией  $\varphi(t)$ , определенной на промежутке времени  $0 \leq \tau < \tau_1$ , где  $\tau_1$  – длительность импульса, и функция  $\varphi(\tau) = 0$  при  $\tau_1 \leq \tau < T$ , тогда для произвольного момента времени  $mT \leq t < (m+1)T$  имеем:

$$\begin{aligned} x_2(mT + \tau) &= \varphi(\tau)x_1(mT), \\ (t &= mT + \tau), \end{aligned}$$

то есть уравнение определяет связь входной и выходной переменных импульсного элемента при амплитудно-импульсной модуляции.

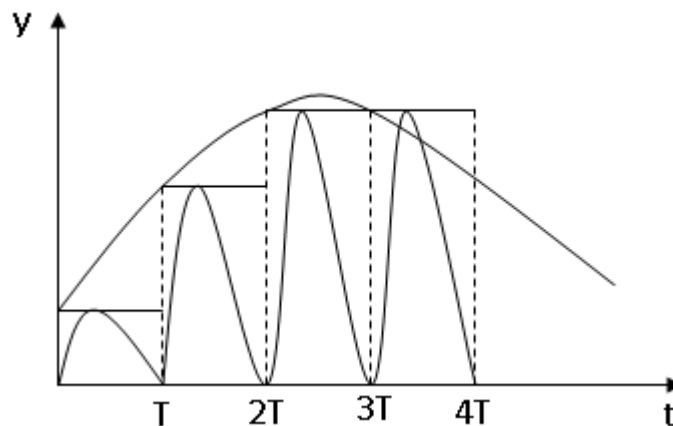


Рисунок 1.3 – Иллюстрация амплитудно-импульсной модуляции

Рассмотрим структурное представление импульсного элемента, осуществляющего амплитудно-импульсную модуляцию, [9]. Для отражения процесса дискретизации по времени в структуру системы вводится элемент «ключ», замыкание которого происходит только в дискретные моменты времени  $t = mT$ , как показано на рисунке 1.4. Полагается, что импульсы на выходе ключа имеют бесконечно малую длительность, а их амплитуда равна значению входного сигнала в дискретные моменты времени  $t = mT$ .

Для отражения формы импульсов, определяющих изменение выходного сигнала при амплитудно-импульсной модуляции, вводится понятие «импульсный элемент». Под импульсным элементом (ИЭ) будем понимать элемент структурной схемы, который формирует импульс длительности  $\tau_1$  ( $\tau_1 < T$ ), описание формы которого задается функцией  $\varphi(\tau)$  на интер-

вале  $0 \leq \tau < \tau_1$  и эти импульсы генерируются с периодом, равным интервалу дискретности  $T$  в моменты времени  $t=mT$ . Пример импульсного элемента приведен на рисунке 1.5.

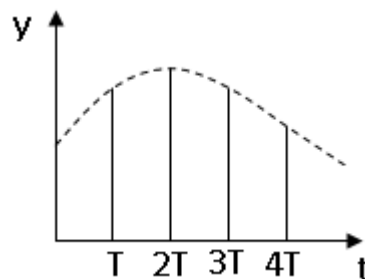


Рисунок 1.4 – График работы ключа

Описание амплитудно-импульсной модуляции в любой системе определяется введением в систему последовательного соединения ключа и импульсного элемента.

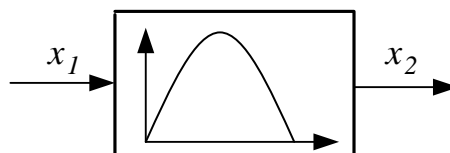


Рисунок 1.5 – Форма импульса, генерируемая импульсным элементом.

## 1.2 Построение модели объекта управления с элементом амплитудно-импульсной модуляции и непрерывной линейной частью

Рассмотрим последовательное соединение ИЭ, осуществляющего амплитудно-импульсную модуляцию, и непрерывной линейной части (НЛЧ) системы, описание которой задается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, как показано на рисунке 1.6.

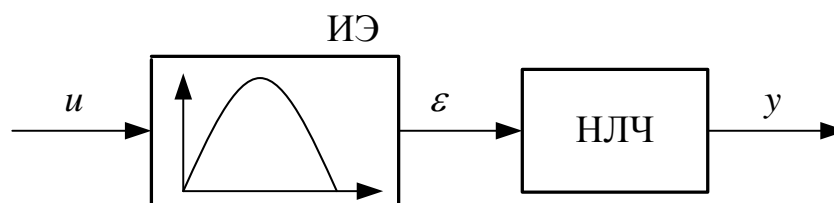


Рисунок 1.6 – Последовательное соединение ИЭ и НЛЧ

На рисунке 1.6 обозначены:  $u$  – входной сигнал ИЭ;  $\varepsilon$  – сигнал, подаваемый на вход НЛЧ;  $y$  – выходной сигнал НЛЧ.

Будем полагать, что НЛЧ описывается уравнением движения в пространстве состояний – уравнением «вход-состояние-выход»:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_H x + B_H \varepsilon \\ y = Cx, \end{cases}$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния непрерывной линейной части (НЛЧ);  $\varepsilon \in R^1$  – входной сигнал для НЛЧ;  $y \in R^1$  – выходной сигнал (выходная переменная) НЛЧ. Матрицы описания модели «вход-состояние-выход» имеют следующие размеры:  $A_H - n \times n$ ;  $B_H - n \times 1$ ;  $C - 1 \times n$ .

Описание ИЭ при амплитудно-импульсной модуляции определяется соотношениями

$$\begin{aligned} t &= mT + \tau, \\ \varepsilon(mT + \tau) &= \varphi(\tau)u(mT), \\ 0 &< \tau < T. \end{aligned}$$

Получим модель, связывающую значения входной и выходной переменных последовательного соединения ИЭ и НЛЧ в дискретные моменты времени  $t = mT$  [15]. Для этого рассмотрим решение уравнения НЛЧ для произвольного момента времени  $t$  ( $mT \leq t < (m+1)T$ ):

$$x(t) = e^{A_H(t-mT)}x(mT) + \int_{mT}^t e^{A_H(t-\theta)}B_H\varepsilon(\theta)d\theta.$$

При описании процессов по граничным значениям времени на интервале дискретности получим разностное уравнение совместного описания ИЭ и НЛЧ:

$$x((m+1)T) = e^{A_H T}x(mT) + \int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_H((m+1)T-\theta)}B_H\varepsilon(\theta)d\theta.$$

Воспользуемся уравнением описания ИЭ

$$\varepsilon(mT + \tau) = \varphi(\tau)u(mT),$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_H((m+1)T-\theta)}B_H\varepsilon(\theta)d\theta = \\ \int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_H((m+1)T-\theta)}B_H\varphi(\theta-mT)u(mT)d\theta = \int_0^T e^{A_H(T-\tau)}\varphi(\tau)d\tau \cdot B_Hu(mT), \end{aligned}$$

где  $\theta = mT + \tau$ .

Отметим, что полученное интегральное выражение не зависит от номера интервала дискретности и результат его вычисления дает постоянную матрицу для любого из номеров интервалов дискретности  $m$ . Обозначим значение данного интегрального выражения через матрицу

$$B = \int_0^T e^{A_H(T-\tau)} \varphi(\tau) d\tau B_H,$$

тогда окончательно для интегральной составляющей имеет место соотношение

$$\int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_H((m+1)T-\theta)} B_H \varepsilon(\theta) d\theta = Bu(mT).$$

При этом уравнение движения при последовательном соединении ИЭ и НЛЧ для дискретных моментов времени  $t = mT$  определяется разностным уравнением с постоянными параметрами

$$\begin{cases} x((m+1)T) = Ax(mT) + Bu(mT) \\ y(mT) = Cx(mT), \end{cases}$$

где  $A$  – постоянная матрица дискретной модели, которая вычисляется по выражению  $A = e^{A_H T}$ ;  $B$  – матрица входов по управлению, которая определяется как

$$B = \int_0^T e^{A_H(T-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \cdot B_H.$$

Полученное совместное описание импульсного элемента и НЛЧ в виде разностного уравнения задает связь значения вектора состояния на последующем интервале дискретности со значениями вектора состояния и входных сигналов на предшествующих интервалах дискретности.

В дальнейшем при записи разностных уравнений будем опускать обозначение интервала дискретности  $T$ , оставив лишь номера интервалов дискретности, полагая, что значение интервала дискретности используется при вычислении матриц дискретного описания последовательного соединения ИЭ и НЛЧ (матриц  $A$  и  $B$ ). Уравнения будем записывать в виде

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m). \end{cases}$$

Отметим также, что разностные уравнения задают описание процессов в системе только в дискретные моменты времени  $t = mT, m = 0, 1, 2, \dots$ , где  $T$  – интервал дискретности, а  $m$  – номер интервала дискретности.

Пример.

Рассмотрим последовательное соединение запоминающего элемента (экстраполятора нулевого порядка) и непрерывной линейной части (НЛЧ). Уравнения ИЭ:

$$\begin{aligned}\varepsilon(mT + \tau) &= u(mT) \\ 0 \leq \tau \leq T.\end{aligned}$$

Уравнение НЛЧ:

$$\dot{x}(t) = A_H x(t) + B_H \varepsilon(t).$$

Рассмотрим поведение этой системы в дискретные моменты времени  $t=mT$ , запишем

$$x((m+1)T) = e^{A_H T} x(mT) + \int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_H((m+1)T-\theta)} B_H \varepsilon(\theta) d\theta.$$

Вычислим значение интеграла

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{A_H(T-\tau)} d\tau &= e^{A_H T} \int_0^T e^{-A_H \tau} d\tau = e^{A_H T} A_H^{-1} (I - e^{-A_H T}) = A_H^{-1} (e^{A_H T} - I) = \\ &= A_H^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{A_H^i T^i}{i!} - I \right) = A_H^{-1} \left( I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_H^i T^i}{i!} - I \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_H^{i-1} T^i}{i!}.\end{aligned}$$

В результате матрицы  $A$  и  $B$  дискретной модели будут равны

$$\begin{aligned}A &= e^{A_H T} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_H^i T^i}{i!}, \\ B &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_H^{i-1} T^i}{i!} B_H.\end{aligned}$$

Матрицы  $A$  и  $B$  могут быть вычислены приближенно с использованием конечного числа членов разложения экспоненты в степенной ряд. Выделим первые  $k$  членов ряда, тогда приближенное вычисление матриц описания движений дискретной модели можно задать равенствами

$$\begin{cases} A = \sum_{i=0}^k \frac{A_H^i T^i}{i!} \\ B = \sum_{i=1}^k \frac{A_H^{i-1} T^i}{i!} B_H. \end{cases}$$

Чем большее количество членов ряда  $k$  используется при вычислении матриц, тем точнее вычисляются значения элементов матрицы.

Пример.

Рассмотрим последовательное соединение запоминающего элемента и НЛЧ, содержащей два интегратора с единичными коэффициентами передачи. Уравнения динамики НЛЧ запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varepsilon \\ y = x_1 \end{cases}$$

или, с использованием векторно-матричных обозначений, в форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где матрицы описания НЛЧ и вычисленные матрицы дискретного описания последовательного соединения ИЭ и НЛЧ имеют вид

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_H^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_H^3 = 0, i \geq 2.$$

Вычисление матриц  $A$  и  $B$  дискретной модели дает

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_H^i T^i}{i!} = I + A_H T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_H^{i-1} T^i}{i!} B_H = (I * T + \frac{A_H T^2}{2}) B_H = \begin{bmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix},$$

где  $T$  – интервал дискретности.

В результате уравнение «вход-состояние-выход», определяющее описание движения данного соединения в дискретные моменты времени, примет вид

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(m) \\ y(m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Выберем интервал дискретности  $T = 1$  с, тогда

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим реакцию последовательного соединения экстраполятора нулевого порядка и непрерывной линейной части на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях  $x(0) = 0$ , то есть

$$x_1(0) = y(0) = 0,$$

$$x_2(0) = \dot{y}(0) = 0,$$

$$u(m) = 1.$$

Проводя последовательно вычисления последующих значений вектора состояний по предыдущим значениям, получим значения вектора состояния, а, следовательно, и значения регулируемой переменной для моментов времени 1 с, 2 с, 3 с и так далее для любого номера интервала дискретности  $m$  (момента времени):

- для  $t = 1с, m = 0$

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0),$$

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x_1(1) = 0.5,$$

$$x_2(1) = 1;$$

- для  $t = 2с, m = 1$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1),$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$x_1(2) = 2,$$

$$x_2(2) = 2;$$

- для  $t = 3с, m = 2$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2),$$

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$x_1(3) = 4.5,$$

$$x_2(3) = 3.$$

Таким образом, последовательное вычисление значений состояний дает численное решение разностного уравнения «вход-состояние-выход». Это позволяет производить анализ траекторий движения для исследуемого соединения элементов системы.

### 1.3 Формы задания уравнений движения дискретного объекта (системы) в виде разностных уравнений

а) Дискретная модель объекта, заданная разностным уравнением в нормальной форме Коши (уравнение вход-состояние-выход), [11].

Разностное уравнение «вход-состояние-выход» задается уравнениями

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m), \end{cases}$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния объекта управления ОУ;  $u \in R^k$  – задающее (управляющее) воздействие;  $y \in R^k$  – вектор регулируемых переменных;  $A - n \times n$  – матрица с постоянными коэффициентами, определяющая динамические свойства системы;  $B - n \times k$  – матрица входов, определяющая точки приложения к объекту управляющих воздействий;  $C - k \times n$  – матрица выходов, определяющая связь между переменными состояния и выходными переменными.

Рассмотрим вычисление переходных процессов для ОУ на основе разностных уравнений описания движения объекта. Поведение регулируемых (выходных) переменных ОУ целиком и полностью определяется поведением вектора состояния объекта. Поэтому получим выражение для вычисления значения вектора  $x(t)$  в произвольный момент времени  $t = mT$ , если заданы начальные условия, т.е. вектор начальных значений  $x(0)$  и значения внешней функции  $u(m)$  для любого момента времени  $t = mT, m = 0, 1, 2, \dots$

Для решения поставленной задачи рассмотрим рекуррентное решение разностного уравнения и установим общую закономерность зависимости значений вектора состояния от начальных значений вектора состояния и внешней функции.

На первом шаге, по заданным начальным условиям  $x(0)$  и значению внешней функции  $u(0)$ , вычислим последующее значение вектора состояния  $x(1)$  в соответствии с исходным уравнением движения:

$$m = 0,$$

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0).$$

На втором шаге, по полученному значению вектора состояния  $x(1)$  и значению внешней функции  $u(1)$ , вычислим последующее значение вектора состояния  $x(2)$  в соответствии с исходным уравнением движения:

$$m = 1,$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1).$$

Аналогично, произведем вычисления на третьем шаге:

$$m = 2,$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2).$$

Продолжая вычисления, рассмотрим  $m$  – й шаг, для которого известно значение вектора состояния на предыдущем шаге и значение внешнего воздействия  $u(m-1)$ . Просматривая закономерность вычисления вектора состояния на предшествующих шагах, получим выражение для вычисления вектора состояния  $x(m)$  для произвольного номера интервала дискретности:

$$x(m) = Ax(m-1) + Bu(m-1) = A^m(x(0)) + A^{m-1}Bu(0) +$$

$$+ A^{m-2}Bu(1) + \dots + Bu(m-1) = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} A^i Bu(m-1-i).$$

б) Аналитическое решение уравнения.

Основываясь на предыдущем анализе, аналитическое решение разностного уравнения можно записать в двух эквивалентных формах:

$$x(m) = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} A^i Bu(m-1-i)$$

и

$$x(m) = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} A^{m-1-i} Bu(i),$$

причем слагаемые, содержащие суммы, подобны записи интеграла типа Дюамеля для непрерывного объекта или системы.

В аналитическом решении разностного уравнения 1-е слагаемое, порожденное ненулевыми начальными условиями, определяет свободное движение дискретной системы или объекта, а 2-е слагаемое, порожденное внешней функцией, определяет вынужденное движение системы.

Из анализа решения разностного уравнения следует, что матрица  $A$  описания движения исходного объекта, а именно ее свойства (характеристический полином, корни характеристического полинома), определяют решение уравнения или поведение процессов для ОУ (системы).

Пример.

Для дискретной системы требуется найти аналитическое решение, описывающее поведение процессов при постоянном внешнем воздействии и нулевых начальных условиях. Предполагается, что все собственные числа матрицы  $A$  или корни характеристического полинома по модулю меньше единицы, начальные условия нулевые,  $x(0)=0$ , а внешнее воздействие имеет постоянное значение

$$u(m) = u_0, m = 0, 1, 2, \dots$$

Характеристическое уравнение матрицы  $A$  имеет вид

$$\det[A - zI] = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0,$$

Производя вычисления в соответствии с аналитическим решением уравнения движения, получаем конечный ряд, похожий на геометрическую прогрессию (в скалярном случае совпадающий), который удастся свести к более простому выражению

$$\begin{aligned} x(m) &= \sum_{i=0}^{m-1} A^i B u_0 = (I + A + A^2 + \dots + A^{m-1}) B u_0 = \\ &= (I - A^m)(I - A)^{-1} B u_0. \end{aligned}$$

Матрица  $A$  в этом случае подобна знаменателю геометрической прогрессии для скалярного случая.

в) Задание уравнений движения в виде разностного уравнения  $n$ -го порядка.

Для объектов или систем с одним входом и выходом уравнение движения может быть задано уравнением вида

$$\begin{aligned} y(m+n) + a_{n-1}y(m+n-1) + \dots + a_1y(m+1) + a_0y(m) = \\ = b_k u(m+k) + b_{k-1}u(m+k-1) + \dots + b_1u(m+1) + b_0u(m), \end{aligned}$$

где  $y$  – регулируемая (выходная) переменная;  $u$  – входное (управляющее) воздействие;  $m$  – номер интервала дискретности,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n$  – максимальный сдвиг выходной переменной относительно текущего значения  $m$ , определяющий порядок разностного уравнения;  $k$  – максимальный сдвиг входной переменной относительно текущего значения входной переменной  $m$ , причем  $k \leq n$  (условие физической реализуемости), а параметры уравнения  $a_i, i = 0, 1, \dots, n-1$  и  $b_j, j = \overline{0, k}$  – постоянные коэффициенты.

Характеристическое уравнение ОУ (или системы) можно получить, если в левой части разностного уравнения формально заменить выходную переменную, сдвинутую на  $i$  интервалов ( $y(m+i)$ ), на алгебраическую переменную  $z^i$ , и приравнять полученный полином к нулю, т.е.

$$z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0.$$

Решение этого уравнения, то есть его корни  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , будут корнями разностного уравнения ОУ (системы).

Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  – вещественные и различные корни разностного уравнения. Положим, что для заданной функции  $u(m)$ , определенной на любом номере интервала дискретности  $m = 0, 1, 2, \dots$ , найдено частное решение уравнения, обращающее исходное уравнение в тождество на любом из интервалов дискретности, т.е. для заданного  $u(m)$  найдено  $y_r(m)$  при любом  $m = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} y_r(m+n) + a_{n-1}y_r(m+n-1) + \dots + a_1y_r(m+1) + a_0y_r(m) &\equiv \\ &\equiv b_k u(m+k) + b_{k-1}u(m+k-1) + \dots + b_1u(m+1) + b_0u(m). \end{aligned}$$

Частное решение разностного уравнения обычно ищется по виду вынужденной функции из условия обращения исходного уравнения в тождество.

Положим, для примера, что внешнее воздействие постоянно:  $u(m) = u_0$ , при любом  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Будем искать частное решение  $y_r(m)$  – также в виде постоянной функции  $y_r(m) = y_0$ . Тогда должны выполняться равенства

$$y_r(m+1) = y_0,$$

$$i = \overline{0, n},$$

$$\sum_{i=0}^n a_i y(m+1) = \sum_{j=0}^k b_j u(m+j),$$

$$\sum_{i=0}^n a_i y_0 = \sum_{j=0}^k b_j u_0,$$

откуда искомое частное решение будет равно

$$y_0 = \frac{\sum_{j=0}^k b_j}{\sum_{i=0}^n a_i} u_0.$$

Это решение обращает исходное уравнение в тождество.

Будем искать общее решение исходного разностного уравнения в виде

$$y(m) = \sum_{i=1}^n c_i z_i^m + y_r(m),$$

где  $z_i$  – корни характеристического уравнения (предполагается, что все корни различны);  $c_i$  – неопределенные коэффициенты.

Определим неизвестные коэффициенты  $c_i$ , исходя из  $n$  заданных начальных условий  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ . Для этого составим систему из  $n$  уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i + y_r(0) = y(0) \\ \sum_{i=1}^n c_i z_i + y_r(1) = y(1) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n c_i z_i^{n-1} + y_r(n-1) = y(n-1). \end{cases}$$

Полученная система из  $n$  уравнений однозначно и единственным образом решается относительно  $n$  неизвестных коэффициентов  $c_i$ , если все корни  $z_i$  различные.

Пример.

Найти реакцию системы, уравнение движения которой имеет вид

$$y(m+2) - 1.3y(m+1) + 0.4y(m) = 0.1u(m),$$

на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях, т.е.  $y(0) = 0, y(1) = 0, u(m) = 1$  при любом  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

Найдем частное решение:

$$\begin{aligned} y_r(m) &= y_0, \\ y_0 - 1.3y_0 + 0.4y_0 &= 0.1 \cdot 1, \\ y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Определим корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} z^2 - 1.3z + 0.4 &= 0, \\ z_1 &= 0.8, \\ z_2 &= 0.5. \end{aligned}$$

Тогда общее решение разностного уравнения может быть записано в виде

$$y(m) = c_1 \cdot 0.8^m + c_2 \cdot 0.5^m + 1.$$

Приравнивая значения переменной  $y$  в соответствующие моменты времени заданным начальным условиям, получаем систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 0 \\ 0.8c_1 + 0.5c_2 + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$c_1 = \frac{2}{3}; \quad c_2 = -1\frac{2}{3}.$$

Окончательно решение исходного разностного уравнения имеет вид

$$y(m) = -\frac{5}{3} \cdot 0.8^m + \frac{2}{3} \cdot 0.5^m + 1,$$

и проверка полученного решения по начальным значениям подтверждает правильность решения

$$y(0) = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 0,$$

$$y(1) = -\frac{5}{3} \cdot 0.8 + \frac{2}{3} \cdot 0.5 + 1 = 0.$$

#### 1.4 Дискретное преобразование Лапласа

Для описания дискретных процессов, присущих цифровым системам, используется понятие решетчатой функции, [9]. Под решетчатой функцией понимается функция, определенная только на дискретном множестве точек, другими словами,  $y(t)$  – решетчатая функция, если ее значения определены только в дискретные моменты времени  $t=mT$ ;  $T$  – интервал дискретности;  $m=0,1,2,\dots$  – целочисленная переменная (дискретное время). Пример решетчатой функции показан на рисунке 1.7. В дальнейшем при записи решетчатой функции обозначение интервала дискретности  $T$  будем опускать, подразумевая что номер интервала дискретности  $m$  определяет момент времени  $t=mT$ , а тем самым решетчатая функция есть функция времени  $t$ .

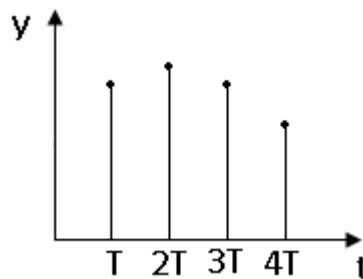


Рисунок 1.7 – График решетчатой функции

Для анализа поведения дискретных процессов и упрощения решения линейных разностных уравнений, определяющих развитие во времени процессов цифровых систем, вводится дискретное преобразование Лапласа. Дискретное преобразование Лапласа позволяет заменить операции сдвига функции и операцию вычисления сумм алгебраическими операциями, что упрощает технологию анализа поведения дискретных процессов и решения разностных уравнений, сводя операции во времени с решетчатыми функциями к алгебраическим преобразованиям.

а) Прямое дискретное преобразование Лапласа.

Для решетчатой функции  $y(m)$ , определенной для любого  $m=0,1,2,\dots$ , дискретное изображение Лапласа  $Y(z)$  определяется отношением

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} y(m)z^{-m},$$

где  $z$  – оператор дискретного преобразования Лапласа, определяемый соотношением  $z = e^{sT}$ ;  $s$  – оператор непрерывного преобразования Лапласа;  $T$  – интервал дискретности.

Операцию взятия дискретного преобразования Лапласа от решетчатой функции будем обозначать

$$Y(z) = Z[y(m)],$$

как оператор дискретного преобразования  $Z[*]$ , примененный к решетчатой функции  $y(m)$ .

Пример.

Вычислим дискретное изображение Лапласа для постоянной решетчатой функции  $y(m) = y_0$ , определенной для любого  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Воспользуемся определением прямого дискретного преобразования Лапласа и на основании разложения в ряд и свертки получим дискретное изображение Лапласа искомой функции

$$Y(z) = Z[y(m)] = \sum_{m=0}^{\infty} y_0 z^{-m} = y_0 \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m} = y_0 (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) =$$

$$y_0 \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) = \frac{y_0 z}{z - 1}.$$

б) Обратное преобразование Лапласа.

Оригинал дискретного изображения Лапласа  $Y(z)$  решетчатой функции  $y(m)$  вычисляется с помощью кругового интеграла

$$y(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) z^{m-1} dz,$$

который определяет связь оригинала решетчатой функции с ее изображением. Рассмотрим вычисление кругового интеграла.

Предположим, что изображение Лапласа  $Y(z)$  есть дробно-рациональная функция, порядок знаменателя которой равен  $n$ . Тогда, если полином знаменателя приравнять к нулю и найти корни, считая, что  $z$  – алгебраическая переменная, то эти корни  $z_1, z_2, \dots, z_n$  определяют полюсы или особые точки подынтегрального выражения при  $m \geq 1$ . Заметим, что при  $m = 0$  может добавиться еще один полюс, порожденный множителем  $\frac{1}{z}$ , или  $z^{-1}$ , и этот полюс  $z_{n+1} = 0$ .

Применим формулу Коши для вычисления кругового интеграла. Для этого положим, что  $z_1, z_2, \dots, z_n$  – полюса подынтегрального выражения

$Y(z) \cdot z^{n-1}$ , и все эти полюсы различны. Тогда по теореме Коши значение кругового интеграла равно сумме вычетов, вычисленных в особых точках, равных полюсам подынтегрального выражения:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) z^{m-1} dz = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}_{z=z_i} [Y(z) z^{m-1}],$$

$$\operatorname{Re}_{z=z_i} [Y(z) z^{m-1}] = \left[ (z - z_i) Y(z) z^{m-1} \right]_{z=z_i}.$$

Рассмотрим случай кратных корней  $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ , т.е. положим, что  $z_1$  – корень кратности  $n$ . В этом случае

$$\frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) z^{m-1} dz = \operatorname{Re}_{z=z_1} [Y(z) z^{m-1}]$$

$$\operatorname{Re}_{z=z_1} [Y(z) z^{m-1}] = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ (z - z_1)^{n-1} Y(z) z^{m-1} \right]_{z=z_1}$$

Пример.

Найдем оригинал функции, изображение которого задается выражением

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)} y_0.$$

Используя теорему Коши, получаем

$$y(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z}{(z-1)} z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{y_0 z^m}{(z-1)} dz,$$

где  $z_1 = 1$  – полюс (особая точка) подынтегрального выражения. Производя вычисление вычета, находим оригинал функции

$$y(m) = \left[ (z-1) \frac{y_0 z^m}{(z-1)} \right]_{z=1} = y_0.$$

в) Дискретное преобразование Лапласа от функции, сдвинутой на один или несколько интервалов дискретности.

Рассмотрим некоторые важные свойства дискретного преобразования Лапласа.

Положим, что  $y(m)$  – решетчатая функция и для нее существует дискретное преобразование Лапласа:  $Y(z) = Z[y(m)]$ . Тогда дискретное преобразование Лапласа от решетчатой функции, сдвинутой на один интервал дискретности, равно

$$Y_1(z) = z[y(m+1)] = zY(z), (y(0) = 0).$$

$$Y_k(z) = z[y(m+k)] = z^k Y(z),$$

$$(y(0) = 0; y(1) = 0; \dots y(k-1) = 0).$$

г) Вычисление дискретного преобразования Лапласа для решетчатой функции, если известен ее непрерывный аналог и определено непрерывное изображение Лапласа этой функции.

Положим, что  $y(m)$  – решетчатая функция, а  $y(t)$  – непрерывная функция, значение которой совпадает со значениями решетчатой функции в дискретные моменты времени  $t = mT$ , другими словами  $y(t) = y(m)$ , а  $Y(s)$  – непрерывное изображение Лапласа функции  $y(t)$ . Тогда дискретное изображение решетчатой функции определяется контурным интегралом

$$Y(z) = Z[y(m)] = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{Y(s)}{1 - e^{sT} \cdot z^{-1}} ds,$$

который вычисляется также на основании теоремы Коши.

Замечание: подобная форма записи контурного интеграла подразумевает, что в подынтегральном выражении переменная  $z$  не зависит от непрерывного оператора Лапласа  $s$ .

В случае, если  $Y(s)$  представляет дробно-рациональную функцию, то полюса подынтегрального выражения целиком и полностью определяются полюсами этой функции. Если  $s_1, s_2, \dots, s_n$  – полюса функции  $Y(s)$  и они различны, то значение контурного интеграла равно:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{k/s}{1 - e^{sT} \cdot z^{-1}} ds = \sum_{i=1}^n \left[ (s - s_i) \frac{Y(s)}{1 - e^{sT} \cdot z^{-1}} \right]_{s=s_i}$$

Пример.

Вычислим дискретное изображение Лапласа для решетчатой функции, значения которой постоянны на любом из интервалов дискретности:

$$y(m) = y_0, y(t) = y_0, Y(s) = \frac{y_0}{s}.$$

$$Y(z) = \left[ s \frac{1}{s(1 - e^{sT} \cdot z^{-1})} y_0 \right]_{s=0} = \frac{y_0}{1 - z^{-1}} = \frac{y_0 z}{z - 1}.$$

д) Вычисление оригинала по дискретному изображению Лапласа делением числителя на знаменатель.

По определению дискретное преобразование Лапласа представляет разложение в виде бесконечного ряда по отрицательным степеням оператора  $z$  дискретного преобразования Лапласа

$$Y(z) = Z[y(m)] = \sum_{m=0}^{\infty} y(m)z^{-m} = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots,$$

причем коэффициентами при степенях оператора  $z$  являются значения решетчатой функции  $y(m)$  в дискретные моменты времени  $t=mT$ . Если изображение решетчатой  $Y(s)$  представляет дробно-рациональную функцию, то деление числителя на знаменатель дискретного изображения Лапласа  $Y(s)$  позволяет получить разложение изображения по отрицательным степеням  $z$ , при этом коэффициенты при соответствующих степенях  $z$  определяются значениями оригинала.

### 1.5 Передаточные функции дискретных объектов

Передаточной функцией линейного стационарного дискретного объекта будем называть отношение дискретного изображения Лапласа выходной переменной к дискретному изображению Лапласа входной переменной, вычисленному при нулевых начальных условиях, [9].

Рассмотрим линейный дискретный объект, для которого известны решетчатые функции  $g(m)$  и  $y(m)$  входной и выходной переменных и для этих функций существуют дискретные изображения Лапласа

$$\begin{aligned} Y(z) &= Z[y(m)], \\ G(z) &= Z[g(m)]. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с определением отношение изображения Лапласа выходной переменной к изображению Лапласа входной переменной при нулевых начальных условиях есть передаточная функция дискретной системы (объекта):

$$W(z) = \frac{Y(z)}{G(z)}.$$

Передаточная функция определяет оператор преобразования в изображениях Лапласа входной переменной в выходную переменную.

а) Вычисление передаточной функции по разностному уравнению  $n$ -го порядка.

Положим, что уравнение описания движения линейного дискретного объекта задается разностным уравнением  $n$ -го порядка

$$\sum_{i=0}^n a_i y(m+i) = \sum_{j=0}^k b_j g(m+j),$$

где  $g(m)$  – описание входной переменной;  $y(m)$  – описание выходной переменной;  $a_i$  и  $b_j$  – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров системы;  $m = 0, 1, 2, \dots$  – номера интервалов дискретности.

Для получения передаточной функции применим дискретное преобразование Лапласа к левой и правой частям исходного разностного уравне-

ния при нулевых начальных условиях и воспользуемся свойствами линейности для дискретного преобразования Лапласа:

$$Z\left[\sum_{i=0}^n a_i y(m+i)\right] = Z\left[\sum_{j=0}^k b_j g(m+j)\right],$$

$$\sum_{i=0}^n a_i Z[y(m+i)] = \sum_{j=0}^k b_j Z[g(m+j)].$$

и сдвига функции для дискретного преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$Z[y(m+i)] = z^i Y(z)$$

$$Z[g(m+j)] = z^j G(z),$$

Выполняя преобразования изображений в полученных соотношениях, приходим к выражению для передаточной функции

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i z^i\right) \cdot Y(z) = \left(\sum_{j=0}^k b_j z^j\right) \cdot G(z),$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{\sum_{j=0}^k b_j z^j}{\sum_{i=0}^n a_i z^i},$$

которая есть отношение двух полиномов степеней переменной  $z$ , причем коэффициенты полинома числителя определяются коэффициентами правой части исходного разностного уравнения  $b_j$ , а коэффициенты полинома знаменателя определяются коэффициентами левой части исходного разностного уравнения  $a_i$ .

Замечание: порядок полинома числителя должен быть меньше (равным) порядку полинома знаменателя передаточной функции, что является условием физической реализуемости системы (объекта).

Пример.

Вычислим передаточную функцию для дискретного объекта и определим корни полинома знаменателя (полуса передаточной функции).

Дискретный объект задан разностным уравнением

$$y(m+2) - 1.6y(m+1) + 0.64y(m) = 0.04g(m).$$

Применяя к обеим частям уравнения дискретное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получаем

$$z^2 Y(z) - 1.6z Y(z) + 0.64Y(z) = 0.04G(z).$$

Вычисляя отношение изображений Лапласа для переменных, получаем выражение для передаточной функции объекта:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{0.04}{z^2 - 1.6z + 0.64}.$$

Приравнивая знаменатель передаточной функции к нулю

$$z^2 - 1.6z + 0.64 = 0,$$

получаем значения двух корней характеристического полинома

$$z_{1,2} = 0.8.$$

б) Вычисление передаточной функции по уравнению вход-состояние-выход.

Положим, что уравнения движения линейной стационарной дискретной системы (объекта) задается уравнением «вход-состояние-выход»

$$\begin{cases} x(m+1) = Fx(m) + Bg(m) \\ y(m) = Cx(m), \end{cases}$$

где  $g \in R^k$  –  $k$ -мерный вектор входных переменных;  $x \in R^n$  –  $n$ -мерный вектор переменных состояния;  $y \in R^k$  –  $k$ -мерный вектор регулируемых (выходных) переменных;  $F$ ,  $B$ ,  $C$  – матрицы соответствующих размеров с постоянными коэффициентами,  $F - n \times n$ ,  $B - n \times k$ ,  $C - k \times n$ .

Применим дискретное преобразование Лапласа к исходному уравнению при нулевых начальных условиях ( $x(0) = 0$ ):

$$\begin{cases} Z[x(m+1)] = F * Z[x(m)] + B * Z[g(m)] \\ Z[y(m)] = C * Z[x(m)]. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[x(m)], \\ G(z) &= Z[g(m)], \\ Y(z) &= Z[y(m)]. \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение в изображениях Лапласа примет вид

$$\begin{cases} zX(z) = FX(z) + BG(z) \\ Y(z) = CX(z). \end{cases}$$

Исключая из уравнений промежуточную переменную (изображение Лапласа вектора состояния  $X(z)$ ), получим связь изображения вектора выходных переменных с изображением вектора входных переменных:

$$\begin{aligned} (zI - F)X(z) &= BG(z), \\ X(z) &= (zI - F)^{-1} BG(z), \\ Y(z) &= C(zI - F)^{-1} BG(z). \end{aligned}$$

Последнее уравнение позволяет получить передаточную матрицу как оператор преобразования изображения вектора входных переменных в вектор изображений выходных переменных:

$$W(z) = C(zI - F)^{-1}B,$$

где  $W(z)$  – передаточная матрица размера  $k \times k$ , элементами которой являются передаточные функции, связывающие входные переменные с соответствующими выходными переменными.

Пример.

Вычислим передаточную функцию для дискретного объекта с уравнением движения «вход-состояние-выход»

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} g(m) \\ y(m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix}, \end{cases}$$

где матрицы модели равны

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим передаточную функцию системы по соотношению

$$W(z) = C(zI - F)^{-1}B.$$

Производя последовательно вычисления, получим

$$\begin{aligned} zI - F &= \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}, \\ (zI - F)^{-1} &= \frac{1}{(z-1)^2} ((zI - F)^T)^V = \frac{1}{(z-1)^2} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{0.5(z+1)}{(z-1)^2}, \\ W(z) &= \frac{0.5(z+1)}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

Дискретная передаточная функция имеет один ноль  $z_0 = -1$  и два кратных полюса  $z_{1,2} = 1$ .

## 1.6 Передаточные функции замкнутых систем

Дискретные передаточные функции (матрицы) замкнутых дискретных систем предназначены для анализа динамических свойств, анализа каче-

ства процессов, точности обработки задающих воздействий и степени подавления возмущающих внешних воздействий для замкнутых систем. Рассмотрим структурную схему дискретной системы, замкнутую единичными обратными связями, показанную на рисунке 1.8. На структурной схеме использованы следующие обозначения:  $G(z) \in R^k$  –  $k$ -мерный вектор задающих воздействий;  $Y(z) \in R^k$  –  $k$ -мерный вектор регулируемых переменных;  $F(z) \in R^l$  –  $l$ -мерный вектор возмущающих воздействий;  $X_1(z), X_2(z) \in R^l$  – векторы, совпадающие по размерности с возмущающим воздействием;  $W_1(z)$  – передаточная матрица размера  $k \times l$ , связывающая изображение  $X_1(z)$  с изображением ошибки  $E(z) = G(z) - Y(z)$ :

$$X_1(z) = W_1(z)E(z),$$

где  $W_2(z)$  – передаточная матрица, связывающая  $Y(z)$  с  $X_2(z)$ :

$$Y(z) = W_2(z)X_2(z).$$

В соответствии с рассматриваемой структурной схемой получаем описание всей системы, записав уравнения связей между входами и выходами для каждого из структурных элементов:

$$\begin{cases} E(z) = G(z) - Y(z) \\ X_1(z) = W_1(z) \cdot E(z) \\ X_2(z) = X_1(z) + F(z) \\ Y(z) = W_2(z) \cdot X_2(z), \end{cases}$$

$$Y(z) = W_2(z)(W_1(z)(G(z) - Y(z)) + F(z)),$$

$$(I + W_2(z)W_1(z))Y(z) = W_2(z)W_1(z)G(z) + W_2(z)F(z).$$

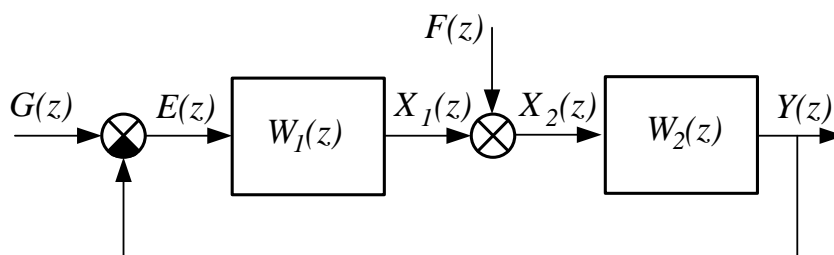


Рисунок 1.8 – Функциональная схема замкнутой системы

Обозначим:  $W_{p.k.}(z) = W_2(z) \cdot W_1(z)$  – передаточная матрица разомкнутого контура системы размера  $k \times k$ , тогда

$$Y(z) = (I + W_{p.k.}(z))^{-1} \cdot W_{p.k.}(z) \cdot G(z) + (I + W_{p.k.}(z))^{-1} \cdot W_2(z) \cdot F(z).$$

Полученное уравнение позволяет выделить передаточную функцию замкнутой системы по задающему воздействию,

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = (I + W_{p.k.}(z))^{-1} W_{p.k.}(z),$$

и передаточную функцию замкнутой системы по возмущающему воздействию

$$\Phi_\gamma(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = (I + W_{p.k.}(z))^{-1} W_2(z).$$

В частном случае при  $k = 1$ :

$$\Phi(z) = \frac{W_{p.k.}(z)}{1 + W_{p.k.}(z)},$$

$$\Phi_\gamma(z) = \frac{W_2(z)}{1 + W_{p.k.}(z)}.$$

При произвольной размерности  $k$

$$Y(z) = \Phi(z)G(z) + \Phi_\gamma(z)F(z).$$

Вычислим передаточную матрицу замкнутых систем по ошибке. Для этого рассмотрим уравнение для ошибки системы

$$E(z) = G(z) - Y(z).$$

Выразим регулируемую переменную  $Y(z)$  через  $E(z)$  и  $G(z)$ . Из цепочки равенств

$$Y = G - E,$$

$$G - E = \Phi G + \Phi_f F,$$

$$E = (I - \Phi)G - \Phi_f F,$$

получаем уравнение связи изображения ошибки замкнутой системы с изображениями задающего и возмущающего воздействий

$$E(z) = (I - \Phi(z))G(z) - \Phi_f(z)F(z).$$

По полученному выражению можем выделить передаточную матрицу замкнутой системы по ошибке относительно задающего воздействия

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{G(z)} = (I - \Phi(z))$$

и передаточную матрицу замкнутой системы по ошибке относительно возмущающего воздействия

$$\frac{E(z)}{F(z)} = \Phi_f(z).$$

Передаточную матрицу по ошибке замкнутой системы относительно задающего воздействия вычислим через передачную матрицу разомкнутого контура системы:

$$\begin{aligned}\Phi_e &= I - (I + W_{p.k.})^{-1}W_{p.k.} = (I + W_{p.k.})^{-1}(I + W_{p.k.}) - (I + W_{p.k.})^{-1}W_{p.k.} = \\ &= (I + W_{p.k.})^{-1}(I + W_{p.k.} - W_{p.k.}) = (I + W_{p.k.})^{-1},\end{aligned}$$

получим

$$\Phi_e(z) = (I + W_{p.k.}(z))^{-1}.$$

При  $k=1$

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1 + W_{p.k.}(z)}.$$

Замечание: для дискретных систем структурные преобразования схем осуществляются по тем же правилам, что и для непрерывных систем, при условии, что для всех структурных элементов системы получены передаточные функции (матрицы). Если в структурных схемах имеет место последовательное соединение импульсных элементов и непрерывных линейных частей, то требуется вначале получить дискретную модель этого последовательного соединения в виде передаточной функции или матрицы, а затем осуществлять структурные преобразования.

## 2 Устойчивость цифровых (дискретных) систем

### 2.1 Классические виды устойчивости дискретных систем

Рассмотрим невозмущенное уравнение движения дискретной системы, заданное в пространстве состояний:

$$x(m+1) = F(x(m)),$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояний;  $F$  –  $n$ -мерная, нелинейная, векторозначная функция векторного аргумента такая, что при  $x=0, F(0)=0$ , и решение исходного разностного уравнения при произвольных начальных условиях единственно.

а) Асимптотическая устойчивость.

*Определение.* Будем говорить, что положение равновесия  $x=0$  асимптотически устойчиво во всем пространстве состояний, если для всех траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных состояний  $x(0) \in R^n$ , выполняется предельное соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x(m) = 0,$$

$$(\lim_{m \rightarrow \infty} \|x(m)\| = 0),$$

т.е. вектор состояния, с течением времени (ростом номера интервала дискретности) стремится к началу координат.

Асимптотическая устойчивость говорит о стремлении траекторий движений к положению равновесия, но о скорости сходимости траекторий движений системы к устойчивому положению информация отсутствует. Для нелинейных систем свойство асимптотической устойчивости может иметь место в ограниченной области пространства состояний, а поэтому понятие асимптотической устойчивости нелинейных систем подразделяют на устойчивость в «большом» – во всем пространстве состояний и на устойчивость в «малом» – в ограниченной области пространства состояний.

б) Экспоненциальная устойчивость.

*Определение.* Будем говорить, что положение равновесия  $x = 0$  экспоненциально устойчиво, если существуют такие положительные числа  $\beta \geq 1$  или  $0 < \alpha < 1$ , что для всех траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных состояний  $x(0) \in R^n$ , и для любого номера интервала дискретности  $m = 0, 1, 2, \dots$  выполняется неравенство:

$$\|x(m)\| \leq \beta \cdot \alpha^m \cdot \|x(0)\|.$$

Параметр  $\alpha$  характеризует скорость сходимости процессов к положению равновесия, и чем меньше его значение, тем быстрее процессы стремятся к положению равновесия. Косвенно этот параметр характеризует быстродействие системы. Геометрическая интерпретация данного вида сходимости показана на рисунке 2.1.

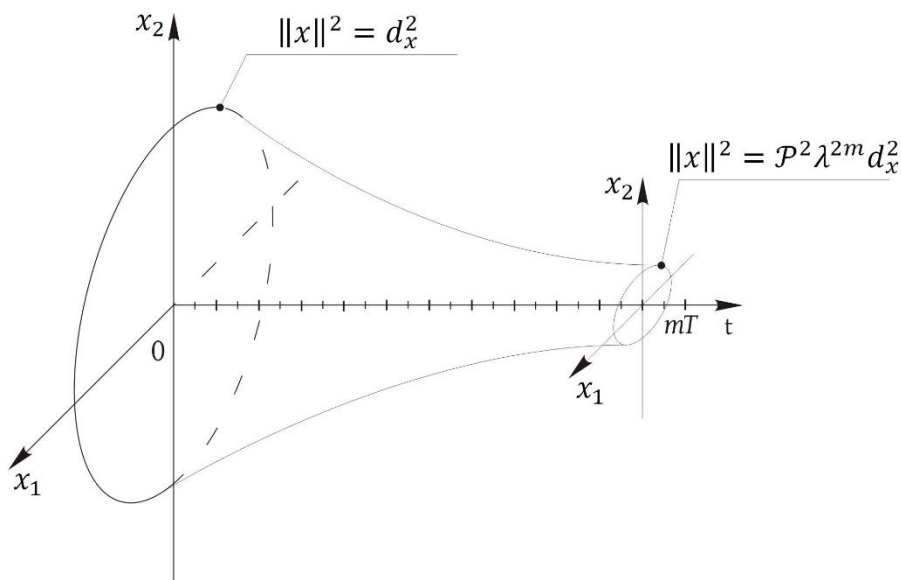


Рисунок 2.1 – Геометрическая интерпретация экспоненциально устойчивых движений

Как и для асимптотической устойчивости, в общем случае для нелинейных систем различают экспоненциальную устойчивость в «большом»,

т.е. во всем пространстве состояний, и в «малом» – в ограниченной области пространства состояний.

## 2.2 Качественная экспоненциальная устойчивость дискретных систем

Пусть поведение динамической системы описывается разностным уравнением вида:

$$x(m+1) = F(x(m)), \quad (2.1)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния дискретной динамической системы;  $F(x)$  –  $n$ -мерная нелинейная вектор-функция векторного аргумента, такая, что при любых  $x(0) \in R^n$  решение уравнения (2.1) существует и единственно;  $m$  – номер интервала дискретности  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Введём понятие качественной экспоненциальной устойчивости (КЭУ) для системы (2.1).

*Определение.* Положение равновесия  $x = 0$  дискретной динамической системы называется качественно экспоненциально устойчивым «в большом», если для любых траекторий движения  $x(m)$  системы (2.1), исходящих из произвольных начальных состояний  $x(0) \in R^n$ , существуют такие параметры  $r > 0, \rho \geq 1, \beta: -1 < \beta + r < 1$ , что для любого номера интервала дискретности  $m, m = 0, 1, 2, \dots$  имеет место следующее неравенство:

$$\|x(m) - \beta^m \cdot x(0)\|_V \leq \rho \cdot [(\beta + r)^m - \beta^m] \cdot \|x(0)\|_V,$$

где норма вектора определяется по выражению

$$\|x(m)\|_V = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i|^v \right]^{\frac{1}{v}}.$$

Определение КЭУ дискретной динамической системы «в малом» может быть введено для ограниченной области, включающей начало координат с использованием аналогичного подхода.

Понятие качественной экспоненциальной устойчивости представляет собой наиболее сильный случай из всех видов устойчивости. В частности, из КЭУ следует экспоненциальная и асимптотическая устойчивость. Для непрерывных и дискретных динамических систем параметры качественной экспоненциальной устойчивости  $r$  и  $\beta$  имеют следующий смысл. Параметр  $\beta$  определяет среднюю скорость сходимости траекторий движения к положению равновесия  $x = 0$  и, следовательно, связан со временем переходного процесса  $t_n$ . Параметр  $r$  определяет отклонения (разброс) траекторий движения от усредненной траектории и характеризует степень колебательности процессов системы.

На основе определений КЭУ для непрерывных и дискретных систем управления можно получить аналитическую связь таких показателей каче-

ства как время переходных процессов, значений первого выброса  $\sigma_0$  и перерегулирования по множеству траекторий, геометрическая интерпретация которых приведена на рисунке 2.2.

При определении качественной экспоненциальной устойчивости норма вектора определялась соотношением

$$\|x(m)\|_v = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i|^v \right]^{\frac{1}{v}},$$

где  $v$  – целое число, равное  $v = 1, 2, \dots$ ;  $x_i$  –  $i$ -ая компонента вектора состояния  $x$ . При  $v = 2$  имеем евклидову норму, которая определяет «естественную» длину вектора, при  $v = 1$  имеем модульную норму. Поверхности постоянного уровня  $\|x\|_v = 1$  ( $x \in R^n$ ) для различных значений  $v$  приведены на рисунке 2.3.

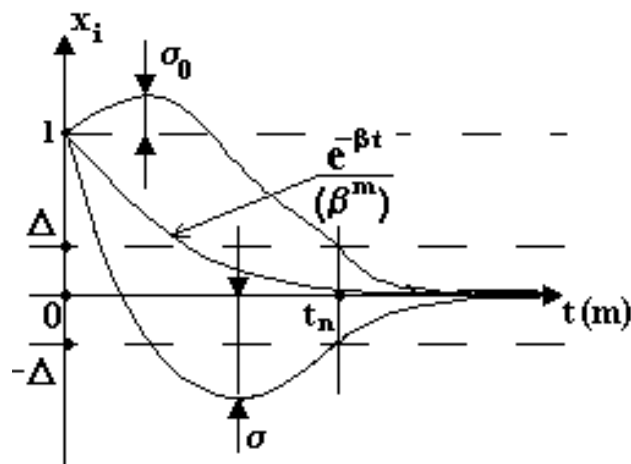


Рисунок 2.2 – Геометрическая интерпретация качественной экспоненциальной устойчивости движений

Отметим, что для детерминированных процессов из сходимости по какой-либо норме следует сходимость по любой из норм.

### 2.3 Метод Ляпунова для анализа свойства устойчивости дискретных систем

Рассмотрим уравнение невозмущенного движения нелинейной дискретной системы:

$$x(m+1) = \Phi(x(m)), \quad x \in R^n,$$

где  $\Phi(x(m))$  –  $n$ -мерная векторзначная функция векторного аргумента  $x$ .

Метод Ляпунова исследования устойчивости основан на сопоставлении движений системы в пространстве состояний размерности  $n$  с отображениями движений системы в скалярное пространство положительных чи-

сел. Если функции в пространстве положительных чисел будут убывать, то можно считать, что траектории движения системы стремятся к положению равновесия. Убывание функции в пространстве положительных чисел гарантирует отрицательное значение первой разности этой функции на траекториях движения системы.

Формализуем метод Ляпунова для исследования устойчивости дискретных систем. Введем функцию Ляпунова  $V(x)$  как функцию, задающую отображение векторов из пространства размерности  $n$  в пространство положительных чисел  $R^n \xrightarrow{V} R^+$ , для которой выполняются следующие свойства:

- $V(x) \geq 0$  для любого  $x \in R^n$  и при  $x = 0 \Leftrightarrow V(x) = 0$ ;
- поверхности постоянного уровня  $V(x) = c, c > 0 - const$  охватывают начало координат (положение равновесия);
- функция  $V(x)$  равномерно возрастает при равномерном возрастании нормы вектора  $x$ .

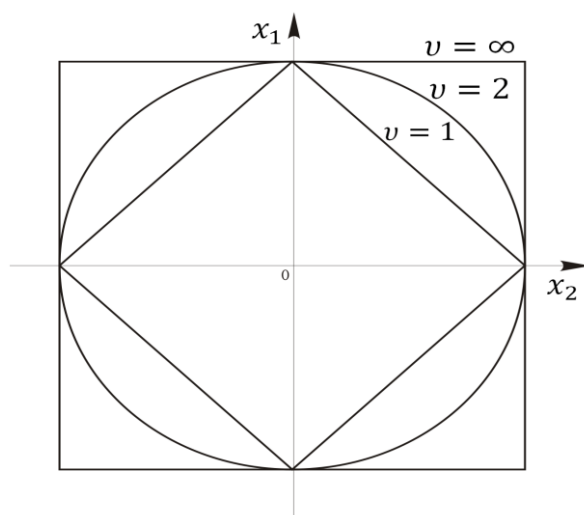


Рисунок 2.3 – Геометрическая интерпретация различных норм

Наиболее простой и распространенный способ выбора функции Ляпунова заключается в выборе ее в виде квадратичной формы. В качестве примера рассмотрим задание функции Ляпунова в виде квадратичной формы для объекта или системы второго порядка

$$V(x) = x^T P x,$$

где  $P$  – положительно определенная симметрическая матрица. Поверхность постоянного уровня

$$V(x) = x^T P x = c,$$

представляет эллипсоид, охватывающий начало координат (точку равновесия). Причем большее значение  $c$  определяет поверхность, которая включает в себя поверхность с меньшим значением  $c$ .

*Теорема Ляпунова.* Для асимптотической устойчивости исходной системы достаточно, чтобы существовала такая функция Ляпунова  $V(x)$ , что на всех траекториях движения системы, исходящих из произвольных начальных условий, и для любого номера интервала дискретности  $m$  первая разность от функции Ляпунова была отрицательной, т.е.

$$V(x(m+1)) - V(x(m)) < 0.$$

Другими словами, значение последующего значения функции Ляпунова на всех траекториях движения системы должно быть меньше предшествующего значения

$$V(x(m+1)) < V(x(m)).$$

*Следствие.* Дискретная система будет экспоненциально устойчивой, если существует такая функция Ляпунова  $V(x)$ , что для всех траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий, и для любого номера интервала дискретности, выполняется неравенство:

$$V(x(m+1)) \leq \lambda^2 V(x(m)),$$

где  $0 < \lambda^2 < 1$ , а функция Ляпунова  $V(x)$  выбрана из класса квадратичных форм.

Покажем, что для любого номера интервала дискретности  $m$  для экспоненциально устойчивой системы должно выполняться соотношение

$$\|x(m)\| < \beta \lambda^m \|x(0)\|,$$

где  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  – евклидова норма;  $V(x) = x^T P x$ ,  $P - n \times n$  – квадратичная форма.

Воспользуемся соотношением Релея для квадратичных форм

$$c_1^2 \|x\|^2 \leq x^T P x \leq c_2^2 \|x\|^2,$$

где  $c_1^2$ ,  $c_2^2$  – минимальное и максимальное собственные числа матрицы  $P$ .

Из соотношения Релея следует, что

$$c_1 \|x\| \leq V^{1/2}(x) \leq c_2 \|x\|,$$

а из условия экспоненциальной устойчивости следуют неравенства

$$V(x(m+1)) \leq \lambda^2 V(x(m)),$$

$$V^{1/2}(x(m+1)) \leq \lambda V^{1/2}(x(m)).$$

Последовательно усиливая неравенства от  $m=0$ , получаем цепочку неравенств:

$$V^{1/2}(x(m)) \leq \lambda^m V^{1/2}(x(0)).$$

$$\|x(m)\| \leq \frac{c_2}{c_1} \lambda^m \|x(0)\|,$$
$$\beta = \frac{c_2}{c_1} \geq 1, \lambda = \alpha.$$

The figure shows a 2D coordinate system with axes  $x_1$  and  $x_2$ . The origin is marked with  $0$ . Two concentric ellipses are centered at the origin. The outer ellipse is labeled  $\Omega_x(\lambda)$ . The inner ellipse is labeled  $x^T P x = \lambda^2 x^T(m) P x(m)$ . A point  $x(m)$  is marked on the inner ellipse, and a point  $x(m+1)$  is marked on the outer ellipse. Arrows indicate the direction of the gradient from  $x(m)$  towards the origin.

## 2.4 Уравнения Ляпунова для анализа свойства устойчивости линейных дискретных систем

$$x(m+1) = F(x(m)),$$

а) Асимптотическая устойчивость.

Для исследования устойчивости выберем функцию Ляпунова из класса квадратичных форм:  $V(x) = x^T P x$ , где  $P - n \times n$  – положительно определенная симметрическая матрица.

Вычислим значения функции Ляпунова на траекториях движения системы для произвольного номера интервала дискретности, используя правую часть исходного уравнения движения, в результате получим:

$$V(x(m+1)) = x^T(m+1) P x(m+1) = x^T(m) F^T P F x(m).$$

Применим теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости:

$$V(x(m+1)) < Vx(m),$$

$$x^T(m) F^T P F x(m) < x^T(m) P x(m),$$

$$x^T(m) (F^T P F - P) x(m) < 0.$$

Введем в рассмотрение дополнительную квадратичную форму  $x^T Q x$ , где  $Q - n \times n$  – положительно определенная симметрическая матрица.

Наряду с полученным неравенством рассмотрим уравнение

$$x^T(m) (F^T P F - P) x(m) = -x^T(m) Q x(m).$$

Из этого уравнения следует условие асимптотической устойчивости, а так как данное уравнение должно быть справедливо для любого значения вектора состояния  $x \in R^n$ , то должно выполняться и матричное уравнение

$$F^T P F - P = -Q.$$

Это уравнение является матричным уравнением Ляпунова для дискретных систем.

*Условие асимптотической устойчивости.* Для того, чтобы линейная дискретная система была асимптотически устойчивой, необходимо, чтобы для любой и достаточно, чтобы для какой-либо, по крайней мере положительно полуопределенной, матрицы  $Q$  решение уравнения Ляпунова относительно матрицы  $P$  было бы положительно полуопределенным.

Практическое использование условий асимптотической устойчивости линейной дискретной системы заключается в использовании достаточного условия. При этом процедура анализа устойчивости включает следующие последовательные шаги:

- производится выбор матрицы  $Q \geq 0$ , по крайней мере, положительно полуопределенной (обычно  $Q = I > 0$ );
- решается уравнение Ляпунова относительно матрицы  $P$ ;
- осуществляется проверка матрицы  $P$  на положительную определенность.

Пример.

Рассмотрим систему с уравнением движения

$$\begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$z_1 = z_2 = 0,$$

где  $F$  – матрица описания движений системы с нулевыми собственными числами. Исследуем данную систему на устойчивость.

Выберем  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , и разрешим уравнение Ляпунова относительно матрицы  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix},$$

$$F^T \cdot P \cdot F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix},$$

$$F^T \cdot P \cdot F - P = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 \\ -p_2 & p_1 - p_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = 0, \\ p_3 = 2. \end{cases}$$

В результате получаем матрицу  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$ , которая является положительно определенной. Следовательно, исследуемая система асимптотически устойчивая.

б) Экспоненциальная устойчивость.

Получим модифицированное уравнение Ляпунова для исследования свойства экспоненциальной устойчивости дискретной линейной системы. Условие экспоненциальной устойчивости дискретной линейной системы

$$V(x(m+1)) \leq \lambda^2 V(x(m)),$$

$$0 < \lambda^2 < 1.$$

Вычислим значение функции Ляпунова на траектории движения системы, для чего подставим вместо последующего значения вектора состояния системы его выражение через предшествующее значение вектора состояния:

$$\begin{aligned}
x^T(m+1)Px(m+1) - \lambda^2 x^T(m)Px(m) &\leq 0, \\
x^T(m)(F^T PF - \lambda^2 P)x(m) &\leq 0, \\
x^T(m)(F^T PF - \lambda^2 P)x(m) &= -x^T(m)Qx(m).
\end{aligned}$$

Если матрица  $Q - n \times n$ , по крайней мере положительно полуопределенная матрица,  $x^T(m)Qx(m) \geq 0$ , то из этого уравнения следует, что выполняется неравенство экспоненциальной устойчивости для любого  $x \in R^n$ . Полученное уравнение эквивалентно матричному уравнению

$$F^T PF - \lambda^2 P = -Q,$$

которое является модифицированным уравнением Ляпунова и при значениях  $\lambda < 1$  позволяет исследовать экспоненциальную устойчивость, а при значении  $\lambda = 1$  совпадает с обычным уравнением Ляпунова для дискретных систем.

в) Качественная экспоненциальная устойчивость.

На основе условий качественной экспоненциальной устойчивости, повторяя те же самые выкладки, приходим к модифицированному уравнению Ляпунова вида

$$(\bar{F} - \beta I)^T P (\bar{F} - \beta I) - r^2 P = -\bar{Q} \beta,$$

где  $\beta$  и  $r$  – параметры качественной экспоненциальной устойчивости. Отметим, что при значениях  $\beta=0$  и  $r=1$  данное уравнение совпадает с классическим уравнением Ляпунова для дискретных систем, а при  $\beta=0$  и при значении  $r$  меньшим единицы – с модифицированным уравнением Ляпунова для исследования экспоненциальной устойчивости.

## 2.5 Необходимые и достаточные корневые условия устойчивости дискретных систем

Рассмотрим невозмущенное уравнение движения дискретной системы:

$$\begin{aligned}
x(m+1) &= Fx(m), \\
x &\in R^n, F - n \times n.
\end{aligned}$$

Определим характеристическое уравнение

$$\det(zI - F) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$$

и найдем его корни:  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Положим, что все корни  $z_1, z_2, \dots, z_n$  вещественные и различные.

Найдем условие, когда система будет асимптотически устойчивой, т.е.

$$\begin{aligned}
x(m) &= F^m x(0), \\
\lim_{m \rightarrow \infty} x(m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} F^m x(0) = 0.
\end{aligned}$$

Для анализа динамических процессов заменим базис в исходной системе таким образом, чтобы в новых координатах матрицы  $F$  была бы в диагональном виде, т.е. произведем замену переменных

$$x = M\xi,$$

где  $\xi \in R^n$ , а матрица  $M$  размера  $n \times n$  такая, что существует обратная матрица  $M^{-1}$ . Тогда исходное уравнение движения приобретает вид

$$\xi(m+1) = M^{-1}FM\xi(m).$$

Матрица  $M$  приводит матрицу описания движения исходной системы к диагональной форме:

$$M^{-1}FM = F_g = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_n \end{bmatrix},$$

тогда уравнения движения системы в новом базисе приобретают вид

$$\begin{bmatrix} \xi_1(m+1) \\ \xi_2(m+1) \\ \vdots \\ \xi_n(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(m) \\ \xi_2(m) \\ \vdots \\ \xi_n(m) \end{bmatrix}.$$

Из полученных уравнений следует, что для каждой из переменных вектора состояния в новом базисе последующее значение этой переменной определяется соотношением

$$\xi_i(m+1) = z_i \xi_i(m), i = \overline{1, n}.$$

Другими словами, описание движения исходной системы эквивалентно системе из  $n$  скалярных разностных уравнений. Запишем решение для каждого из  $n$  скалярных уравнений по каждой из переменных в зависимости от начальных значений:

$$\xi_i(m) = z_i^m \xi_i(0),$$

откуда следует, что каждая из переменных вектора состояния с течением времени будет стремиться к нулю,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_i(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} z_i^m \xi_i(0) = \xi_i(0) \lim_{m \rightarrow \infty} z_i^m = 0,$$

тогда и только тогда, если модуль каждого из корней по модулю меньше единицы  $|z_i| < 1$ .

*Вывод.* Для того, чтобы линейная дискретная система была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения по модулю были меньше единицы. Если хотя бы один из корней по модулю больше единицы, то система неустойчивая.

## 2.6 Уравнения Ляпунова как критерии расположения корней замкнутой системы в определенных областях комплексной плоскости внутри (вне) единичного круга с центром в начале координат

Рассмотрим множество матриц  $\bar{F}$  с собственными числами (корнями характеристического уравнения)  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$ , расположенными в круге радиуса  $r$  с координатами в точке  $(\beta; j0)$  (смещенный круг).

Рассмотрим множество матриц  $F$ , являющихся функциями от матрицы  $\bar{F}$ , таких, которые связаны преобразованиями подобия  $F = \frac{1}{r}(\bar{F} - \beta I)$ . Обозначим через  $z_1, z_2, \dots, z_n$  собственные числа матриц  $F$ , т.е.

$$z_i = \frac{\bar{z}_i - \beta}{r},$$

где  $i = \overline{1, n}$ .

Так как все собственные числа  $\bar{z}_i$  лежат в круге радиуса  $r$ , смещенном на значение  $\beta$ , то все собственные числа  $\bar{z}_i$  по модулю меньше 1.

С другой стороны, если все собственные числа  $z_i$  по модулю меньше единицы, то для матрицы  $\bar{F}$  все собственные числа лежат в круге радиуса  $r$ , смещенном на значение  $\beta$ .

Запишем уравнение Ляпунова как критерий расположения собственных чисел матрицы  $F$  в единичном круге:

$$F^T P F - P = -Q.$$

Подставим в уравнение Ляпунова выражение матрицы  $F$  через  $\bar{F}$ :

$$\frac{1}{r^2}(\bar{F} - \beta I)^T P (\bar{F} - \beta I) - P = -Q.$$

Умножив уравнение на  $r^2$ , получим:

$$(\bar{F} - \beta I)^T P (\bar{F} - \beta I) - r^2 P = -\bar{Q},$$

где  $\bar{Q} = r^2 Q$ .

На рисунке 2.5 изображены различные окружности, ограничивающие области расположения корней при различных видах устойчивости системы.

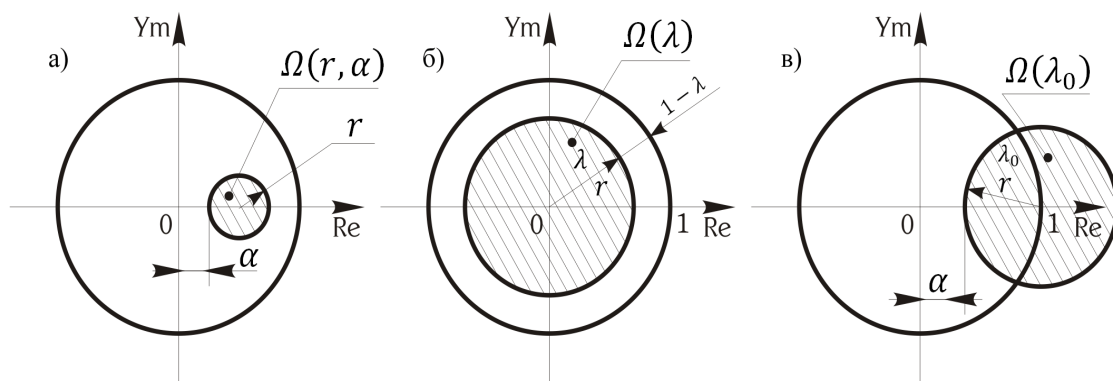


Рисунок 2.5 – Области расположения корней уравнения: а) смещенный круг – качественная экспоненциальная устойчивость, б) центральный круг – экспоненциальная устойчивость

Если  $\beta = 0$  (круг центральный), то модифицированное уравнение Ляпунова принимает вид

$$\overline{F^T} P F - r^2 P = -Q,$$

если  $\beta = 0$ ,  $r = 1$ , то

$$\overline{F^T} P F - P = -Q.$$

При исследовании системы на устойчивость обычно выполняется следующая последовательность действий.

Выбираются параметры  $\beta$ ,  $r$ , назначается матрица  $Q$ , по крайней мере  $Q \geq 0$  ( $Q = 1$ ), и решается модифицированное уравнение Ляпунова относительно матрицы  $P$  с последующей проверкой ее на положительную определенность.

Если  $P$  получилась положительно определенной, то корни характеристического уравнения матрицы  $\bar{F}$  лежат в круге радиуса, смещенном на значение  $\beta$  относительно начала координат.

Рассмотрим случай, когда  $\beta = 0$ ;  $r < 1$ .

Если все корни характеристического уравнения системы расположены в круге радиуса  $r < 1$ , т.е.  $|z_i| < r, i = \overline{1, n}$ , то в этом случае говорят, что система обладает запасом устойчивости  $\eta = 1 - r$ .

Запас устойчивости характеризует отклонение доминирующих корней (наибольших по модулю) от границы устойчивости.

Степень устойчивости косвенно характеризует быстродействие системы: чем больше значение степени устойчивости, тем более быстрые процессы присущи системе.

## 2.7 Виды стохастической устойчивости дискретных систем

Прямой метод Ляпунова, являющийся одним из наиболее общих методов исследования систем управления, базируется на понятиях асимптотической либо экспоненциальной устойчивости и использовании выбранной определенным образом функции Ляпунова. Этот метод при корректном выборе функции Ляпунова позволяет построить конструктивные процедуры анализа [2,3] и синтеза [4] систем управления. Введенное в работе [4] определение качественной экспоненциальной устойчивости и разработанный аналитический аппарат обусловили возможность установления взаимосвязи между параметрами КЭУ и значениями «инженерных» показателей качества синтезируемых и исследуемых систем.

Понятие стохастической экспоненциальной устойчивости систем также широко используется, в частности, в работе [5]. В данной статье рассматривается стохастический аналог качественной экспоненциальной устойчивости. Примеры использования понятия стохастической экспоненциальной устойчивости при синтезе регуляторов дискретных систем можно найти в [6, 17].

Рассмотрим дискретную систему вида

$$x(m+1) = F(q(m, x(m)), x(m), \xi(m)), \quad (2.2)$$

где  $x(m)$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы;  $\xi(m)$  –  $q$ -мерный вектор случайного внешнего возмущающего воздействия;  $q(m, x(m))$  –  $k$ -мерный вектор случайно изменяющихся параметров, возможно, зависящий и от состояния системы;  $F(\cdot)$  – детерминированная нелинейная  $n$ -мерная функция от векторных аргументов. Будем считать, что для случайных последовательностей  $q(m)$  и  $\xi(m)$  для всех  $m$  определены (т. е. существуют) значения математического ожидания и матриц ковариаций.

*Определение.* Дискретная система будет качественно экспоненциально  $\nu$ -устойчивой относительно положения равновесия  $x = 0$ , если существуют такие положительные числа  $\beta > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\beta + r < 1$ , и  $\rho \geq 1$ , что на всех траекториях системы для любого номера  $m$  интервала дискретности справедливо неравенство

$$M[\|x(m) - \beta^m \cdot x(0)\|_\nu] \leq \rho \cdot ((r + \beta)^m - \beta^m) \cdot M[\|x(0)\|_\nu],$$

где  $M[.]$  обозначает операцию взятия математического ожидания.

Получим локальное достаточное условие стохастической качественной экспоненциальной  $\nu$ -устойчивости. В соответствии с прямым методом Ляпунова для исследования системы (2.2) вводится функция Ляпунова  $V(x)$  в виде положительно определенной функции степени  $\nu$ , обладающей свойством

$$c_1 \|x\|_\nu \leq V^{1/\nu}(x) \leq c_2 \|x\|_\nu,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – постоянные и положительные коэффициенты.

Достаточные условия качественной экспоненциальной  $\nu$ -устойчивости получаются из рассмотрения условного математического ожидания функции Ляпунова от разности последующего значения вектора состояния  $x(m+1)$  и прогнозируемого среднего значения  $\beta x(m)$  на всех траекториях движения системы.

Локальное достаточное условие качественной экспоненциальной  $\nu$ -устойчивости имеет вид

$$M[V(x(m+1) - \beta x(m)) | x(m)] \leq r^\nu M[V(x(m))],$$

где  $\beta$  и  $r$  – параметры КЭУ,  $\beta + r < 1$ .

Частный случай условия при  $\beta=0$  и  $r<1$  является известным достаточным условием экспоненциальной  $\nu$ -устойчивости. Параметр  $\beta$  в среднем характеризует изменения математического ожидания, а параметр  $r$  – дисперсионные отклонения.

При исследовании детерминированных систем прямым методом Ляпунова вводятся несколько критериев устойчивости и используются различные функции Ляпунова. Значительно большее разнообразие определений устойчивости вводится при рассмотрении стохастических систем. Применение понятия качественной экспоненциальной устойчивости позволяет с единых позиций исследовать процессы как в детерминированных, так и в стохастических системах.

На практике наиболее просто исследовать КЭУ стохастических систем, применяя квадратичные функции Ляпунова вида (для  $\nu = 2$ )  $V(x) = x^T P x$ , где  $P$  – положительно определенная симметрическая  $n \times n$  – матрица. Использование норм при  $\nu = 2$  согласуется со свойствами случайных процессов второго порядка и принято в инженерных приложениях, основанных на корреляционной теории. При этом постоянные  $c_1, c_2$  неравенства – квадратные корни из минимального и максимального собственных чисел матрицы  $P$ .

Обобщенные нормы с  $\nu > 2$  целесообразно использовать при исследовании КЭУ более сложных стохастических систем, содержащих в описании моментные функции выше второго порядка.

Пример.

В качестве примера на рисунке 2.6 приведена схема лазерной угломерной системы, где  $y_1, y_2$  – регулируемые величины;  $g_1, g_2$  – входные задающие воздействия;  $e_1, e_2$  – сигналы рассогласования;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – выходные сигналы общего тракта;  $u_1, u_2$  – управляющие воздействия; ИМ<sub>1</sub>, ИМ<sub>2</sub> – исполнительные механизмы углов места и азимута. Особенностью данной системы является то, что наличие фазовых искажений в общем тракте преобразования сигнала приводит к возникновению перекрестных связей между исполнительными механизмами. Если считать фазовые искажения случайными, то в линейном приближении получается следующая математическая модель дискретной системы:

$$x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) + B_g(\xi)g(m);$$

$$y(m) = Cx(m),$$

где  $A$  – матрица описания исходной системы;  $B$  и  $B_g$  – матрицы входов по управляющим и задающим воздействиям соответственно;  $C$  – матрица выходов;  $\xi$  – случайное возмущение в перекрестных связях каналов.

Пусть матрицы описания лазерной угломерной системы имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2,5 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5000 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix},$$

$$B_g = \begin{bmatrix} k_{o.cb1} & 0,01 + \xi[m] \\ 0,01 + \xi[m] & k_{o.cb2} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $k_{o.cb1}$ ,  $k_{o.cb2}$  – коэффициенты обратной связи по выходам ИМ<sub>1</sub> и ИМ<sub>2</sub> соответственно;  $\xi(m)$  – некоррелированная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

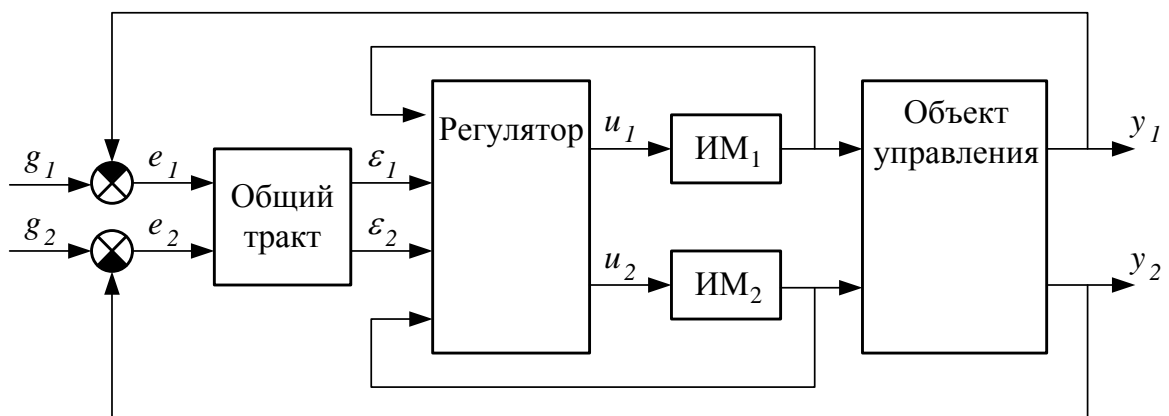


Рисунок 2.6 – Схема лазерной угломерной системы

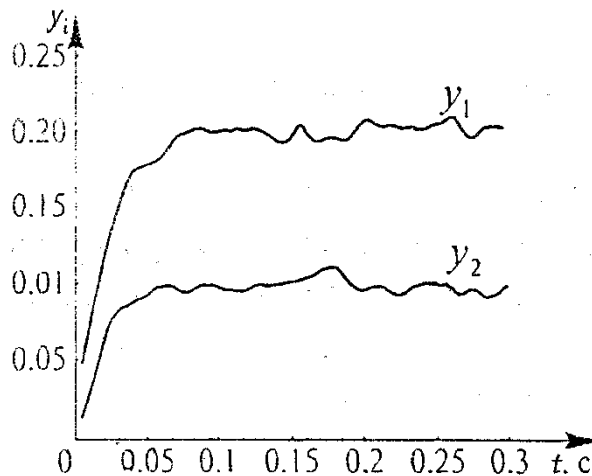


Рисунок 2.7 - Реализации переходных процессов

Для квадратичной функции Ляпунова, а также корневых параметров  $\beta = 0,7$  и  $r = 0,1$  была получена следующая матрица линейных стационарных обратных связей:

$$K = \begin{bmatrix} 1,0219 & 0,0249 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0070 & 0,0260 \end{bmatrix}.$$

На рисунке 2.7 представлены графики типовых реализаций переходных процессов в обоих исполнительных механизмах при единичном ступенчатом воздействии. Из приведенных графиков видно, что типовые реализации соответствуют процессам, характерным для устойчивых систем.

## 2.8 Матричные неравенства и уравнения для линейных позитивных систем

Получим матричные неравенства и уравнения типа Ляпунова при использовании для анализа модульных функций Ляпунова ( $v=1$ ) применительно к линейным позитивным нестационарным и, как частный случай, стационарным дискретным системам, у которых все элементы описания и значения принимают неотрицательные значения. К классу позитивных систем относятся, например, системы сравнения, используемые для анализа свойств многосвязных систем на основе метода векторных функций Ляпунова. Пусть движение линейной дискретной системы задано разностным уравнением

$$v(m+1) = \lambda(m)v(m)$$

где  $v$  –  $k$ -мерный вектор состояния системы, все переменные которого принимают только неотрицательные значения при любом значении  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\lambda(m)$  – квадратная матрица размером  $k \times k$  неотрицательными элементами.

Введем модульную функцию Ляпунова ( $v=1$ ) в виде

$$V(v) = \sum_{i=1}^k p_{0i} |v_i|,$$

где  $p_{0i}$  – положительные весовые коэффициенты;  $v_i$  – переменные вектора состояния позитивной системы ( $v = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T$ ). Учитывая неотрицательность значений переменных вектора состояния  $v_i \geq 0$ , знак модуля в выражении для модульной функции Ляпунова можно опустить и переписать ее в более компактной матричной форме

$$V(v) = P_0 v,$$

где  $P_0 = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0k}]$  – матрица-строка размера  $1 \times k$  с положительными элементами. В дальнейшем, хотя и будем пользоваться более простой формой записи модульной функции Ляпунова, необходимо помнить, что первообразной является первичная форма задания. Поэтому следует отметить, что если  $A$  – квадратная матрица размера  $k \times k$ , то соотношение

$$V(Av) = P_0 Av$$

справедливо только в том случае, если элементы матрицы  $A$  неотрицательные.

Приведем вывод матричного неравенства и уравнения типа Ляпунова, соответствующие локальному достаточному условию экспоненциальной устойчивости позитивной системы. Запишем неравенство для значений предшествующего и последующего значений модульных функций Ляпунова на траекториях движения позитивной системы:

$$\begin{aligned} V(\lambda(m)v(m)) &\leq \lambda V(v(m)), \\ 0 &< \lambda < 1. \end{aligned}$$

Элементы матрицы  $\lambda(m)$  неотрицательны, следовательно, данное неравенство можно переписать в виде

$$P_0 \lambda(m) v(m) \leq \lambda P_0 v(m),$$

которое должно выполняться при любых  $m$  и любых неотрицательных значениях вектора  $v(m)$ . Поэтому неравенство эквивалентно матричному неравенству

$$P_0 \lambda(m) \leq \lambda P_0,$$

которое понимается в смысле, что каждый элемент матрицы  $P_0 \lambda(m)$  не больше соответствующего элемента матрицы  $P_0$ , умноженного на значение параметра  $\lambda$ .

Непосредственно проверяется, что если выполняется матричное уравнение

$$P_0 \lambda(m) - \lambda P_0 v(m) = -Q_0(m),$$

где матрица  $Q_0(m)$  – матрица строка размером  $1 \times k$  с неотрицательными элементами, то выполняется и предшествующее матричное неравенство. Данное матричное уравнение является модифицированным уравнением

типа Ляпунова для анализа экспоненциальной устойчивости позитивных систем с неотрицательными значениями переменных состояния и элементов матрицы описания движения системы. По аналогии с пучком квадратичных форм назовем пару  $P_0\lambda(m)v$ ,  $\mu P_0v$  пучком линейных форм с положительными элементами, где  $v \in R_t^k$ . Установим минимаксные свойства этого пучка в виде неравенств:

$$\mu_-(m) \leq \frac{P_0\lambda(m)v}{P_0v} \leq \mu_+(m).$$

Представим матрицу  $\lambda(m)$  в виде  $[\lambda(m) = \lambda_1(m), \lambda_2(m), \dots, \lambda_k(m)]$ , где  $\lambda_i(m)$  – матрица – столбец размера  $k \times 1$ . Тогда значения  $\mu_+(m)$  и  $\mu_-(m)$  могут быть определены следующим образом:

$$\mu_+(m) = \max_i \left\{ \frac{P_0\lambda_i(m)}{P_{0i}} \right\},$$

$$\mu_-(m) = \min_i \left\{ \frac{P_0\lambda_i(m)}{P_{0i}} \right\}.$$

Если положить значение  $\lambda(m) = \mu_+(m)$ , то из предшествующего неравенства следует выполнение неравенства, являющегося условием экспоненциальной устойчивости. Таким образом, полученное выражение позволяет вычислить параметр  $\lambda$ , определяющий оценку быстродействия позитивной системы. Значение  $\rho$  при этом равно  $\rho = \frac{C_{20}}{C_{10}}$ , где значения  $C_{10}$  и  $C_{20}$  определяются из минимаксных свойств пучка линейных форм с положительными элементами:

$$C_{10} \leq \frac{P_0v}{I_0v} \leq C_{20}$$

Отметим, что  $I_0 = [1, 1, \dots, 1]$  есть матрица – строка размера  $1 \times k$  с единичными элементами. Следовательно, значения  $C_{10}$  и  $C_{20}$  определяются выражениями

$$C_{10} = \min_i \{p_{0i}\} \quad C_{20} = \max_i \{p_{0i}\}$$

где  $p_{0i}$  – элементы матрицы  $P_0$ .

Дадим геометрическую интерпретацию локальных достаточных условий экспоненциальной устойчивости позитивной системы при использовании модульных функций Ляпунова. Часть пространства  $R^k$ , содержащее все вектора с неотрицательными значениями элементов, будем обозначать  $R_+^k (R_+^k \subset R^k)$ . На рисунке 2.8 показана геометрическая интерпретация модульной функции Ляпунова для случая  $k=2$ .

Поверхность постоянного уровня (прямая линия), определяемая уравнением

$$P_0 v = P_0 v(m),$$

отсекает в  $R_+^2$  область с заштрихованными границами. Поверхность постоянного уровня

$$I_0 v = C_{i0} V(v(m)), \quad (i = 1, 2)$$

иллюстрирует минимаксные ограничения для модульной функции Ляпунова, определяемой матрицей  $P_0$ . На рисунке 2.8б показано, что для экспоненциально устойчивой системы в случае выполнения локальных достаточных условий при  $0 < \lambda < 1$  и любом значении  $v(m) \in R_+^2$  последующее значение вектора  $v(m)$  будет принадлежать заштрихованной области, т.е. области, отсекаемой от  $R_+^2$  поверхностью

$$P_0 v = \lambda V(v(m)).$$

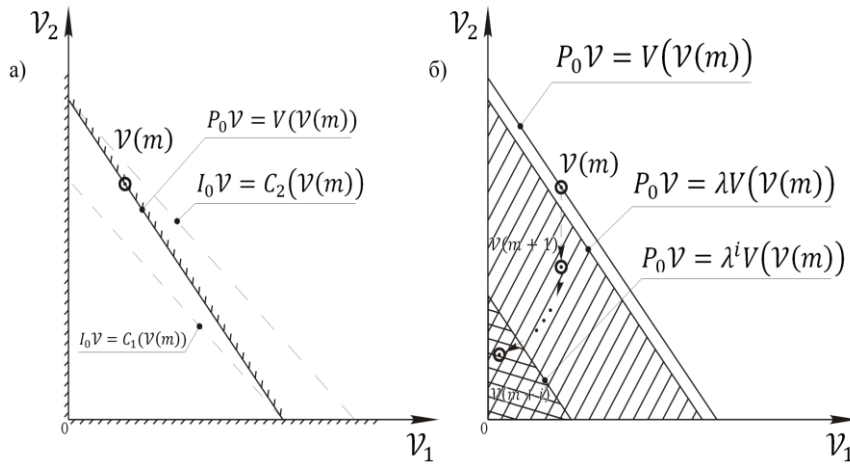


Рисунок 2.8 – Интерпретация модульной функции Ляпунова:  
а) ограничения на модульную функцию; б) интерпретация экспоненциальной устойчивости

Другими словами, если поверхность

$$P_0 v = V(v(m))$$

проходит через конец вектора  $v(m)$ , то значение постоянного уровня поверхности, ограничивающей область расположения последующих значений вектора состояний системы, уменьшается в  $\lambda$  раз ( $\lambda < 1$ ). Область расположения вектора состояния через  $i$  интервалов дискретности изображена на этом рисунке 2.8б с двойной штриховкой. С увеличением числа интервалов  $m$  при  $\lambda < 1$  эти области стягиваются к началу координат, а, следовательно, и значения компонент вектора состояния стремятся к нулю. Перепишем модифицированное уравнение Ляпунова для стационарного случая позитивной системы, когда элементы матрицы  $\Lambda$  не зависят от интервала дискретности:

$$P_0 \Lambda - \lambda P_0 = -Q_0. \quad (2.3)$$

При значении параметра  $\lambda=1$  имеем уравнение типа Ляпунова для стационарных позитивных дискретных систем. Это уравнение позволяет производить анализ устойчивости линейных стационарных дискретных систем, когда матрица  $\Lambda$  имеет неотрицательные элементы.

*Теорема.* Пусть задана позитивная система и матрица  $\Lambda$  – квадратная матрица с неотрицательными элементами ( $v(0) \in R_+^k$ ). Тогда для того, чтобы позитивная система была бы устойчивой, необходимо, чтобы для любой и достаточно, чтобы для какой-либо матрицы  $Q_0$  с положительными элементами, удовлетворяющая уравнению типа Ляпунова ( $\lambda=1$ ) матрица  $P_0$  содержала бы только положительные элементы.

Достаточное условие теоремы позволяет получить простой алгоритм анализа устойчивости стационарных дискретных систем. Задав произвольную матрицу  $Q_0$  с положительными элементами, решаем линейное матричное уравнение (2.3) относительно неизвестной матрицы  $P_0$  и осуществляем проверку элементов матрицы  $P_0$ , чтобы они были положительными. Решение уравнения Ляпунова (при  $\lambda=1$ ) имеет вид:

$$P_0 = Q_0(I - \Lambda)^{-1},$$

где матрица  $(I - \Lambda)$  имеет обратную, если собственные числа  $\Lambda$  лежат в единичном круге, т.е. исходная позитивная система устойчива.

*Пример.*

Рассмотрим систему, описание которой задано разностным уравнением

$$\begin{bmatrix} v_1(m+1) \\ v_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.05 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(m) \\ v_2(m) \end{bmatrix}, v_1(0) \geq 0, v_2 \geq 0.$$

Выберем матрицу  $Q_0 = [1 \ 1]$ . Тогда решение уравнения Ляпунова дает матрицу

$$P_0 = [0.33(3) \quad 5.33(3)]$$

с положительными элементами, а, следовательно, рассматриваемая система устойчива. Действительно собственные числа матрицы  $\Lambda$  равны

$$\lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.9,$$

т.е. по модулю меньше единицы.

## **2.9 Анализ переходной и установившихся составляющих динамических процессов дискретных систем при внешних воздействиях. Матричные коэффициенты ошибок**

Анализ качества САУ основывается на исследовании переходных процессов, характерных для функционирования системы. Выделение в переходных процессах переходной и установившейся составляющих позволяет разделить задачу анализа качества процессов на две отдельные подзадачи. Установившаяся составляющая характеризует точность воспроизведения полезного сигнала или подавление возмущающих воздействий. По ней определяют точностные показатели качества системы. По переходной со-

ставляющей определяют каким образом и как долго система приходит к режиму нормального функционирования. По ней вводятся такие показатели качества как время переходного процесса, перерегулирование, количество колебаний и др. В данном параграфе рассмотрим определение переходной и установившейся составляющих в общем случае для нелинейных систем, а затем остановимся на вычислительных аспектах выделения этих составляющих для линейных стационарных дискретных систем, когда модель внешних воздействий также является линейной.

Положим, что описание движения исследуемой многомерной дискретной САУ задается разностным уравнением

$$\begin{aligned}x(m+1) &= F(q, x(m), \varphi(m)), \quad \|x(0)\| \leq d_x, \\y(m) &= Cx(m), \\e(m) &= q(m) - y(m),\end{aligned}\tag{2.4}$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы;  $\varphi$  – составной вектор входных ( $q \in R^k$ ) и возмущающих ( $f \in R^e$ ) воздействий ( $\varphi^T \neq [q^T, f^T]$ );  $y$  –  $k$ -мерный вектор регулируемых величин;  $e$  –  $k$ -мерный вектор ошибки;  $F(.,.,.)$  – нестационарная нелинейная  $n$ -мерная вектор-функция;  $C$  – матрица выходов размером  $k \times n$ . Ограничение по норме вектора начальных состояний в (2.4) ( $d_x > 0$ ) задает область допустимых начальных рассогласований  $D(x)$ .

Модель наиболее характерных для исходной системы детерминированных внешних воздействий зададим в виде модели автономной дискретной динамической системы уравнениями

$$\begin{aligned}\varphi(m) &= \begin{bmatrix} q(m) \\ f(m) \end{bmatrix} = H\xi(m) = \begin{bmatrix} H_q \\ H_f \end{bmatrix} \xi(m) \\ \bar{\xi}(m+1) &= \Gamma \xi(m), \quad \|\xi(0)\| \leq d_\xi\end{aligned}\tag{2.5}$$

где  $\xi$  –  $x$ -мерный вектор состояния модели внешних воздействий;  $\Gamma$  – квадратная матрица размером  $x \times x$ , а размеры матриц  $H$ ,  $H_q$  и  $H_f$  удовлетворяют условию корректности этих уравнений. Ограничение начальных условий исходит из физической ограниченности множества воздействий, приложенных к реальным системам. Модель внешних воздействий определяет множество типовых воздействий, являющихся решениями разностного однородного уравнения с начальными условиями из области, ограниченной поверхностью  $\|\xi(0)\|^2 = d_\xi^2$ . Эту область будем называть областью допустимых начальных значений внешних воздействий. Любое начальное значение вектора состояния  $\xi(0)$ , принадлежащее этой области, осуществляет выборку одного типового воздействия и его параметров из множества генерируемых моделью внешних воздействий.

В целях простоты описания модель внешних воздействий задана линейной. Во многих практических случаях, когда типовые воздействия

описываются полиномами времени, набором гармонических незатухающих (экспоненциально затухающих или расходящихся) функций, экспоненциальных функций или линейной комбинацией перечисленных функций, модель внешних воздействий удастся свести к модели автономной системы. Принципиально, когда функции, генерируемые моделью внешних воздействий, недостаточно точно аппроксимируют внешние воздействия, модель внешних воздействий усложняется и может быть выбрана нелинейной. Переходные процессы в системе, порождаемые ненулевыми начальными условиями на вектор состояния системы и внешними воздействиями, генерируемыми моделью внешних воздействий, однозначно определяются поведением во времени вектора состояния системы. Ненулевые начальные условия при отсутствии внешних воздействий порождают свободные движения системы, а внешние воздействия – вынужденные. Определим понятие установившейся составляющей вынужденного движения. Для этого представим вектор состояния системы в виде суммы:

$$x(m) = x_n(m) + x_y(m), \quad (2.6)$$

где  $x_n(m)$  – переходная составляющая;  $x_y(m)$  – установившаяся составляющая вектора состояния.

*Определение.* Под установившейся составляющей вынужденного движения будем понимать такую вектор-функцию  $x_y(m)$ , которая при заданном воздействии  $x_y(m)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) обращает уравнение движения системы в тождество

$$x_y(m+1) = f(m, x_y(m), \varphi(m)), \quad (2.7)$$

при каждом значении  $m$ , и к которой сходятся при  $m$  стремящемся к бесконечности все решения уравнения движения системы (2.7) при любых значениях вектора  $x(0) \in R^n$  из допустимой области начальных рассогласований  $x(0) \in Dx$ , т.е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n(m)) = 0,$$

где  $\rho(\cdot)^n$  – метрика, равная

$$\rho(x_n(t)) = \min \|x(t) - x_{0_n}\|, \\ x_0 \in D_0,$$

а  $D_0$  – ограниченная замкнутая односвязная область диссипативности  $D_0 \in D_x$ .

В дальнейшем будем рассматривать только такой класс систем, для которого область диссипативности  $D_0$  включает только начало координат, т.е. рассмотренное условие имеет вид

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_n(m)\| = 0.$$

Данное условие фактически означает, что исследуемая система при заданном воздействии  $\varphi(m)$  относительно переходной составляющей должна быть устойчивой. Вычитая из исходного уравнения движения уравнение для установившейся составляющей, получим уравнение движения относительно переходной составляющей:

$$x(m+1) = F_{\varphi}(m, x_n(m)), \quad x_n(0) = x(0) - x_y(0),$$

где применено следующее обозначение

$$F_{\varphi}(m, x_n(m)) = F(m, x(m), \varphi(m)) - F(m, x_y(m), \varphi(m)).$$

Свойства модели системы по переходной составляющей определяют, каким образом процессы стремятся к установившемуся режиму, т.е. характеризуют быстродействие и характер сходимости. Определение установившейся составляющей  $x_y(m)$  для нелинейных систем как непрерывных, так и дискретных для класса внешних воздействий, заданных в виде линейной модели в общем случае, является достаточно сложной задачей.

Обычно она решается лишь в простейших случаях при жестких ограничениях на внешние воздействия (постоянные, линейно-возрастающие) и ограничениях на структуру системы (линейная часть плюс статические нелинейности).

Рассмотрим алгоритм вычисления установившейся составляющей при воздействиях, генерируемых моделью внешних воздействий, для линейных дискретных систем с уравнением описания движения системы вида

$$x(m+1) = Fx(m) + B_{\varphi}\varphi(m), \quad (2.8)$$

где  $F$  – квадратная матрица размером  $n \times n$  с постоянными элементами;  $B_{\varphi}$  – матрица входов размером  $n \times (k+1)$ , характеризующая точки приложения входных и возмущающих воздействий. Остальные переменные имеют тот же смысл и размерности, что и в исходном уравнении, и, кроме того, регулируемые величины  $w$  и ошибка  $e$  определяются теми же соотношениями, что и в исходном уравнении. Свойства линейности системы и линейности модели внешних воздействий наталкивают на мысль, что в установившемся режиме преобразование внешних воздействий подобно действию линейного оператора. В работах [7, 10] показано, что установившуюся составляющую можно искать как результат линейного преобразования вектора состояния модели внешних воздействий в виде

$$x(m) = M\xi(m),$$

где  $M$  – матрица размером  $n \times x$ . Установившаяся составляющая обращает полученное уравнение в тождество. Поэтому подстановка правой части уравнения модели внешних воздействий в уравнение установившегося режима с учетом уравнения движения системы приводит к матричному алгебраическому уравнению

$$M\Gamma - FM = B_\varphi M, \quad (2.9)$$

решение которого относительно матрицы  $M$ , позволяет находить искомое линейное преобразование для вычисления установившейся составляющей. Из полученных соотношений и решения уравнения движения системы следует, что установившаяся составляющая определяется соотношением

$$x_y(m) = M\Gamma^m \xi(0), \quad (2.10)$$

где  $M$  есть решение матричного уравнения типа Сильвестра и зависит от локального значения вектора  $\xi(0)$ , по которому осуществляется выборка конкретного внешнего воздействия из множества воздействий, генерируемых моделью внешних воздействий. Уравнение движения исходной системы по переходной составляющей имеет вид

$$\begin{aligned} x_n(m+1) &= Fx_n(m), \\ x_n(0) &= x(0) - M\xi(0). \end{aligned}$$

Это уравнение является линейным, и его решение для определения переходной составляющей можно записать в форме

$$x_n(m) = F^m x_n(0) = F^m (x(0) - M\xi(0)), \quad (2.11)$$

откуда следует, что переходная составляющая зависит от вида внешнего воздействия, задаваемого вектором  $\xi(0)$ . Если исходная система устойчива, то собственные числа матрицы  $F$  принадлежат кругу единичного радиуса, и переходная составляющая с течением времени стремится к нулю. Найденная установившаяся составляющая обращает исходное уравнение в тождество.

Рассмотрим решение уравнения движения исходной системы, которое задается выражением

$$x(m) = F^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} F^i B_\varphi (m-1-i), \quad (2.12)$$

где первое слагаемое определяет свободную составляющую переходного процесса, порождаемую ненулевыми начальными условиями, а второе слагаемое – вынужденную составляющую, порождаемую внешним воздействием. Сопоставим выражению (2.12) переходной составляющей решение уравнения (2.8), выраженное через переходную и установившуюся составляющие. На основании выражений (2.6), (2.10) и (2.11) имеем

$$x(m) = F^m (x(0) - M\xi(0)) + M\Gamma^m \xi(0), \quad (2.13)$$

Сравнивая (2.9) и (2.10), приходим к выводу, что вынужденная составляющая движений определяется выражением

$$\sum_{i=0}^{m-1} F^i B_{\varphi} \varphi(m-1-i) = M$$

или соотношением

$$\sum_{i=0}^{m-1} F^i B_{\varphi} H \Gamma^{-1-i} \xi(m) = (M - F^m M \Gamma^{-m}) \xi(m), \quad (2.14)$$

которое получается при использовании решения уравнения (2.5). Из (2.14) получаем матричное уравнение

$$M = F^m M \Gamma^{-m} + \sum_{i=0}^{m-1} F^i B_{\varphi} H \Gamma^{-1-i}.$$

Полученное уравнение может служить основой для организации итерационных процедур отыскания решения матричного алгебраического уравнения (2.9).

Способы решения алгебраического матричного уравнения типа Сильвестра при различных формах задания матрицы  $\Gamma$  приведены в [7]. Следует отметить, что форма задания матрицы  $\Gamma$  определяется проектировщиком системы. Для одного и того же класса внешних воздействий можно построить различные модели, отличающиеся формами задания пары матриц  $\Gamma$  и  $H$  и начальными значениями вектора состояния  $\xi(0)$ . При всех формах задания матрица  $\Gamma$  должна иметь одни и те же собственные числа, которые порождают элементарные базисные функции при решении этого уравнения. Множество воздействий, генерируемых данной моделью, состоит из линейных комбинаций этих элементарных базисных функций. Для упрощения решения уравнения модели внешних воздействий и анализа системы желательно матрицу  $\Gamma$  задавать в о вещественном диагональном виде.

В линейной системе при внешних воздействиях переходная составляющая зависит от начальных условий на вектор состояния системы, а также от вида внешнего воздействия, что проявляется в наличии в решении добавочного члена, эквивалентного изменению значения вектора начального состояния системы. Кроме того, переходная составляющая является линейной комбинацией только собственных функций движений, «порождаемых» собственными числами матрицы  $\Gamma$  системы (2.8). Следовательно, качество процессов в переходном режиме зависит от свойств системы (2.8).

Установившаяся составляющая является линейной комбинацией только собственных функций модели (2.5), порождаемых собственными числами матрицы  $\Gamma$ . Другими словами, в установившемся режиме вектор состояния устойчивой системы (2.8) с точностью до линейного преобразования воспроизводит движения автономной системы (2.5), генерирующей внешние воздействия. По установившейся составляющей определяют точностные

показатели системы, которые зависят как от свойств замкнутой системы (матрицы  $\Gamma$ ), так и от вида внешних воздействий (модели (2.5)). Переходная и установившаяся составляющие вектора регулируемых величин и ошибки определяются переходной и установившейся составляющими вектора состояния, соответственно, и, как следует из (2.4) и (2.6), имеют вид

$$\begin{aligned} y_n(m) &= cx_n(m) & y_y(m) &= cx_y(m) \\ e_n(m) &= -cx_n(m) & e_y(m) &= q(m) - cx_y(m) \end{aligned}$$

где индексы "n" и "y" присвоены переходной и установившейся составляющим векторов соответственно. Иллюстрация переходной ( $x_n$ ) и установившейся составляющих ( $x_y, e_y$ ), а также переменной  $x$ , при входном воздействии с постоянной скоростью ( $q$ ) приведена на рисунке 2.9.

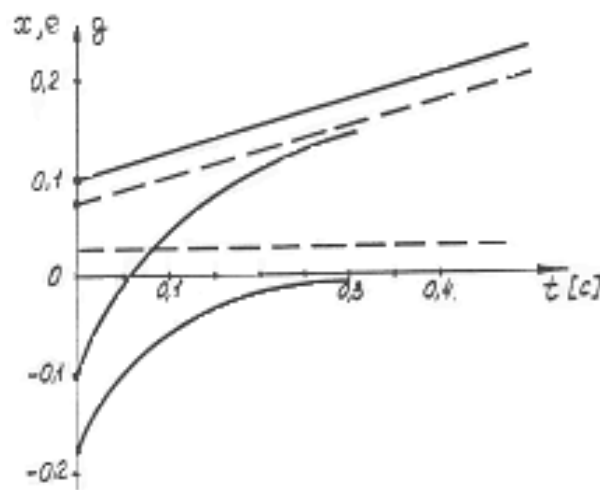


Рисунок 2.9 – Переходная и установившаяся составляющие процессов

### 3 Аналитические методы построения регуляторов цифровых систем для объектов и внешних воздействий с измеряемыми состояниями

#### 3.1 Построение регуляторов для систем стабилизации на основе принципа Беллмана. Основы и постановка задачи модального управления дискретными объектами

Рассмотрим объект управления (ОУ) с уравнением движения

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m), \end{cases}$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния;  $y \in R^k$  – вектор регулируемых переменных;  $U \in R^k$  – вектор управляющих воздействий;  $A$  – матрица системы размера  $n \times n$ ;  $B$  – матрица входов по управлению размера  $n \times k$ ;  $C$  – матрица выходов размера  $k \times n$ .

Будем полагать, что пара  $A, B$  полностью управляема, т.е. с помощью управлений можно воздействовать на все собственные движения объекта.

Будем говорить, что ОУ – с полной информацией, если все переменные вектора состояния доступны для измерения. Если число измерений меньше, чем порядок объекта, то объект – с неполной информацией.

Для ОУ с полной информацией будем искать управление на основе принципа Беллмана как функцию всех переменных состояния, а именно линейную функцию, в виде

$$U(m) = -kx(m),$$

где знак минус, стоящий перед алгебраическим выражением, отражает отрицательность обратных связей, а матрица  $k$  размера  $k \times n$  называется матрицей линейных стационарных обратных связей (ЛСОС), и ее элементы определяют коэффициенты отрицательных обратных связей (ООС) по соответствующим переменным вектора состояния.

Регулятор, который вырабатывает подобное управление, будем называть линейным статическим регулятором или пропорциональным регулятором. Примеры аналитического синтеза дискретных систем управления можно найти в [12, 13, 14].

Получим уравнение движения замкнутой системы

$$x(m+1) = Ax(m) - Bkx(m)$$

с искомым законом управления:

$$\begin{cases} x(m+1) = Fx(m) \\ y = Cx(m) \end{cases},$$

где  $F = A - Bk$  –  $n \times n$  – матрица описания замкнутой системы, определяющая ее свойства.

Задача синтеза пропорционального регулятора (стабилизирующих управлений) заключается в отыскании таких параметров матрицы обратных связей  $k$ , которая обеспечивает замкнутой системе, динамика которой определяется матрицей  $F = A - Bk$ , наперед заданные желаемые свойства.

### 3.2 Задача модального управления

Определим характеристический полином замкнутой системы и корни характеристического уравнения.

Запишем характеристический полином в виде

$$\det(F - zI) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0,$$

где  $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n-1$  – коэффициенты характеристического полинома;  
 $z_1, z_2, \dots, z_n$  – корни характеристического полинома (системы).

Задача модального управления заключается в выборе желаемых коэффициентов характеристического полинома  $\alpha_i^*$  или желаемых корней системы  $z_i^*$  по заданным показателям качества и обеспечения желаемых коэффициентов (корней) с помощью параметров матрицы обратных связей  $k$ , т.е.

$$F = A - Bk;$$

$$\det(F - zI) = z^n + \alpha_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \alpha_1^* z + \alpha_0^* = 0$$

или желаемых корней  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ .

### 3.3 Решение задачи модального управления на основе принципа эталонной модели

Введем в рассмотрение эталонную модель, определяющую желаемые свойства замкнутой проектируемой системы, а именно желаемые корни или коэффициенты характеристического уравнения.

Эталонную модель зададим уравнениями движения:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma \eta(m) \\ \nu(m) = -H \eta(m), \end{cases}$$

где  $\eta$  – вектор состояния эталонной модели, по размерности совпадающий с вектором состояния объекта;  $\nu$  – вектор выхода эталонной модели, по размерности совпадающий с вектором управления;  $\Gamma$  – квадратичная матрица размера  $n \times n$ , определяющая свойства эталонной модели и такая, что ее характеристический полином или собственные числа совпадают с желаемым характеристическим полиномом, или желаемыми корнями замкнутой системы;  $H - k \times n$  – матрица выходов: пара  $H\Gamma$  полностью наблюдаема, т.е. в выходах проявляются все собственные движения эталонной модели. Характеристический полином матрицы  $\Gamma$ :

$$\det(\Gamma - zI) = z^n + \alpha_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \alpha_1^* z + \alpha_0^* = 0,$$

и корни этого уравнения совпадают с желаемыми корнями  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ .

Потребуем, чтобы вектор состояния замкнутой системы с искомым управлением вел себя таким же образом, как и вектор состояния эталонной модели. Другими словами, потребуем, чтобы для любого момента времени  $mT$  вектор состояния замкнутой системы и эталонной модели были бы связаны линейным стационарным преобразованием, т.е.

$$x(m) = M \eta(m),$$

где  $M$  – квадратичная матрица размера  $n \times n$ , задающая неособое линейное преобразование.

Подставим в уравнение движения замкнутой системы уравнение связи между ее вектором состояния и вектором состояния эталонной модели:

$$\begin{aligned} M\eta(m+1) &= FM\eta(m) \\ \eta(m+1) &= M^{-1}FM\eta(m). \end{aligned}$$

Для обеспечения линейной связи между векторами состояния замкнутой системы и эталонной модели выберем матрицу  $M$  таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$M^{-1}FM = \Gamma.$$

Из свойств матриц следует совпадение характеристических полиномов матриц  $F$  и  $\Gamma$  и их собственных чисел. Получим эквивалентную форму записи  $F = A - Bk$ . Подставим:

$$M\Gamma - AM = -BKM,$$

получили матричное уравнение с неизвестными матрицами  $M$  и  $K$ . Матрицы  $A, B, \Gamma$  заданы; матрица  $M$  размера  $n \times n$  содержит  $n^2$  неизвестных; матрица  $K$  размера  $k \times n$  содержит  $k \cdot n$  неизвестных. Всего неизвестных  $n^2 + kn$ . Приравнявая левые и правые части, получим  $n^2$  уравнений.

Полученное матричное уравнение эквивалентно системе из  $n^2$  уравнений, а число неизвестных  $n^2 + kn$ . Следовательно, требуется получить дополнительное матричное уравнение, эквивалентное системе из  $k \cdot n$  уравнений.

Для получения дополнительного матричного уравнения потребуем, чтобы выход эталонной модели совпадал бы с желаемым управляемым воздействием, т.е. чтобы для любого  $m$  выполнялось

$$U(m) = V(m).$$

Свяжем управляющее воздействие и выход эталонной модели:

$$\begin{aligned} -Kx(m) &= -H\eta(m), \\ KM\eta(m) &= H\eta(m), \\ \forall \eta \in R^n : KM &= H. \end{aligned}$$

В итоге получаем систему матричных уравнений

$$\begin{cases} M\Gamma - AM = -BH \\ K = HM^{-1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) является матричным уравнением, линейным относительно матрицы  $M$ . Это уравнение имеет единственное решение относительно матрицы  $M$ , причем матрица  $M$  имеет обратную  $M^{-1}$ , если на исходные матрицы описания объекта и эталонной модели накладываются следующие ограничения:

- пара  $A, B$  полностью управляема;

- пара  $H, G$  полностью наблюдаема;
- матрицы  $G, A$  не должны иметь одинаковые собственные числа (корни разомкнутой системы объекта не должны совпадать с желаемыми корнями замкнутой системы).

Второе соотношение в (3.1) позволяет по заданному решению матричного уравнения типа Сильвестра вычислять матрицу линейных обратных связей  $K$ , решающую задачу модального управления.

Пример.

Рассмотрим ОУ с полной информацией, модель которого представляется последовательно соединенными экстраполятором нулевого порядка и двух интеграторов. В предположении, что измеряются выходная переменная и скорость ее изменения, необходимо найти коэффициенты линейных обратных связей, обеспечивающие в замкнутой системе оптимальность по быстродействию. Структурная схема системы управления показана на рисунке 3.1

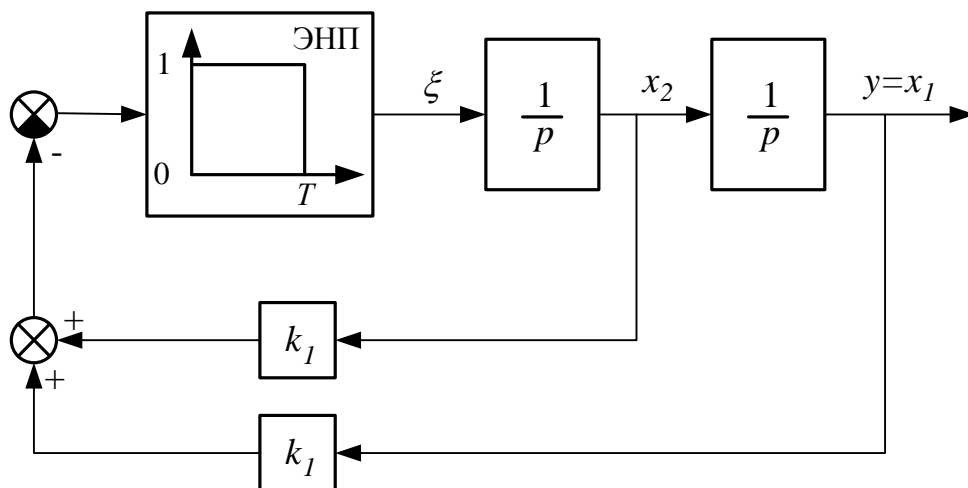


Рисунок 3.1 – Модель ОУ с последовательно соединенными экстраполятором нулевого порядка и двумя интеграторами

Матрицы описания непрерывной модели ОУ равны

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим матрицы дискретной модели объекта управления при условии, что период квантования времени постоянный и равен  $T$ :

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_H^i T^i}{i!} = I + A_H \cdot T + 0 = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_H^{i-1} T^i}{i!} \cdot B_H = (I \cdot T + A_H \cdot \frac{T^2}{2}) \cdot B_H = \begin{bmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}.$$

В результате модель объекта управления в дискретном времени имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \xi(m),$$

и если положить  $T = 1$  [с], то

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для линейных дискретных систем с одним входом и выходом справедливо следующее: система будет оптимальной по быстродействию, т.е. ее переходные процессы будут закончены не более чем за  $n$  интервалов дискретности, где  $n$  – порядок системы, если все  $n$  корней системы равны нулю. Назначим матрицы эталонной модели. Для этого выберем желаемые корни  $z_1^* = z_2^* = 0$ . Характеристическое уравнение системы должно иметь вид

$$z^2 = 0 \quad (\alpha_0^* = 0; \alpha_1^* = 0).$$

Назначим матрицу  $\Gamma$  по желаемым корням в диагональном виде  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  и выберем матрицу  $H$  из условий полной наблюдаемости пары  $H, \Gamma: H = [1 \ 0]$ .

Решим матричное уравнение Сильвестра относительно матрицы  $M$ . Из уравнения

$$M\Gamma - AM = -BH,$$

используя обозначения и выполняя промежуточные вычисления

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix},$$

$$M\Gamma = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix},$$

$$AM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + m_3 & m_2 + m_4 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix},$$

$$BH = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -m_1 - m_3 = -0.5 \\ m_1 - m_2 - m_4 = 0 \\ -m_3 = -1 \\ m_3 - m_4 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что элементы искомой матрицы  $M$  равны

$$m_1 = -0.5, \quad m_2 = -1.5, \quad m_3 = 1, \quad m_4 = 1.$$

Теперь нетрудно вычислить

$$\det M = -0.5 + 1.5 = 1$$

и

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Вычислим матрицу обратных связей

$$K = HM^{-1},$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

В результате искомые коэффициенты обратных связей равны  $k_1=1, k_2=1.5$ .

### 3.4 Особенности задания матриц описания эталонной модели для дискретных систем

Ставится задача нахождения эквивалентной дискретной эталонной модели в предположении, что по требуемым показателям качества переходных процессов определена непрерывная эталонная модель с уравнением движения

$$\begin{cases} \frac{d\eta(t)}{dt} = \Gamma_H \eta(t) \\ v(t) = -H\eta(t), \end{cases}$$

где  $\eta(t) - n$ -мерный вектор состояния непрерывной эталонной модели;  $v(t) - k$ -мерный вектор выходов эталонной модели;  $\Gamma_H - n \times n$ -матрица, определяющая желаемое поведение проектируемой системы, т.е. желаемые собственные числа  $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$  или желаемый характеристический полином  $\det[\Gamma_H - sI] = s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + a_1^* s + a_0^* = 0$ ,  $a_{n-1}^*, a_{n-2}^*, \dots, a_0^*$  назначены из требуемых показателей качества переходных процессов (например, с помощью стандартных полиномов);  $H - k \times n$ -матрица выходов эталонной модели: пара  $H, \Gamma_H$  полностью наблюдаема.

Наряду с непрерывной эталонной моделью рассмотрим дискретную эталонную модель с уравнением движения:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma \eta(m) \\ V(m) = -H \eta(m), \end{cases}$$

где все переменные по размерности соответствуют непрерывной эталонной модели, а размеры матриц равны  $\Gamma - n \times n$ ,  $H - k \times n$ .

Ставится задача нахождения такой дискретной эталонной модели, поведение которой подобно поведению непрерывной эталонной модели, причем под подобием понимается совпадение значений вектора состояния дискретной эталонной модели с вектором состояния непрерывной эталонной модели в дискретные моменты времени  $t = mT, m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $T$  – интервал дискретности, т.е.

$$\forall t = mT, \eta(m) = \eta(t).$$

Запишем решение уравнения движения непрерывной эталонной модели для произвольного момента времени  $t$  относительно  $t_0, \forall t: t_0 < t$ :

$$\eta(t, t_0) = e^{\Gamma_H(t-t_0)} \eta(t_0).$$

Положим, что  $t_0 = mT$ , а  $t = (m+1)T$ . Тогда

$$\eta((m+1)T) = e^{\Gamma_H((m+1)T-mT)} \eta(mT)$$

или

$$\eta(m+1) = e^{\Gamma_H T} \eta(m).$$

Дискретная эталонная модель будет подобна непрерывной эталонной модели при условии, если матрицу  $\Gamma$  выбрать в виде  $\Gamma = e^{\Gamma_H T}$ .

Найдем связь корней характеристического уравнения дискретной эталонной модели с корнями характеристического уравнения непрерывной эталонной модели. Для этого вычислим корни  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$  характеристического уравнения дискретной эталонной модели

$$\det[\Gamma - zI] = z^n + \alpha_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \alpha_1^* z + \alpha_0^* = 0.$$

В силу того, что матрица  $\Gamma$  является функцией от матрицы  $\Gamma_H$ , корни ее характеристического уравнения будут той же самой функцией непрерывной эталонной модели, т.е.  $z_i^* = e^{s_i^* T}, i = 1..n$ .

Есть другой вариант формирования матриц дискретной эталонной модели. Для непрерывной системы с помощью стандартных полиномов по заданным показателям качества выбираем желаемые корни характеристического уравнения  $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$ . По ним рассчитываем желаемые корни  $z_i^* = e^{s_i^* T}, i = 1..n$ , и коэффициенты характеристического уравнения дискретной эталонной модели  $\alpha_{n-1}^*, \dots, \alpha_1^*, \alpha_0^*$ .

По корням или коэффициентам характеристического уравнения формируем матрицу дискретной эталонной модели  $\Gamma$  в одной из канонических форм. Матрица  $H$  выбирается из условия полной наблюдаемости пары  $H, \Gamma$ .

### 3.5 Синтез интегрального регулятора для систем с одним входом и выходом

Интегральные регуляторы предназначены для повышения точностных свойств и повышают порядок астатизма системы на единицу. В цифровой технике для этих же целей применяют дискретный аналог интегрального регулятора.

Рассмотрим систему с ОУ с полной информацией, структурная схема которой показана на рисунке 3.2. ОУ задан уравнением движения:

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m), \end{cases}$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния;  $u \in R^1$  – управляющее воздействие;  $y \in R^1$  – регулируемая переменная;  $A$  –  $n \times n$  – матрица, определяющая свойства объекта;  $B$  –  $n \times 1$  – матрица входов по управлению;  $C$  –  $1 \times n$  – матрица выходов.

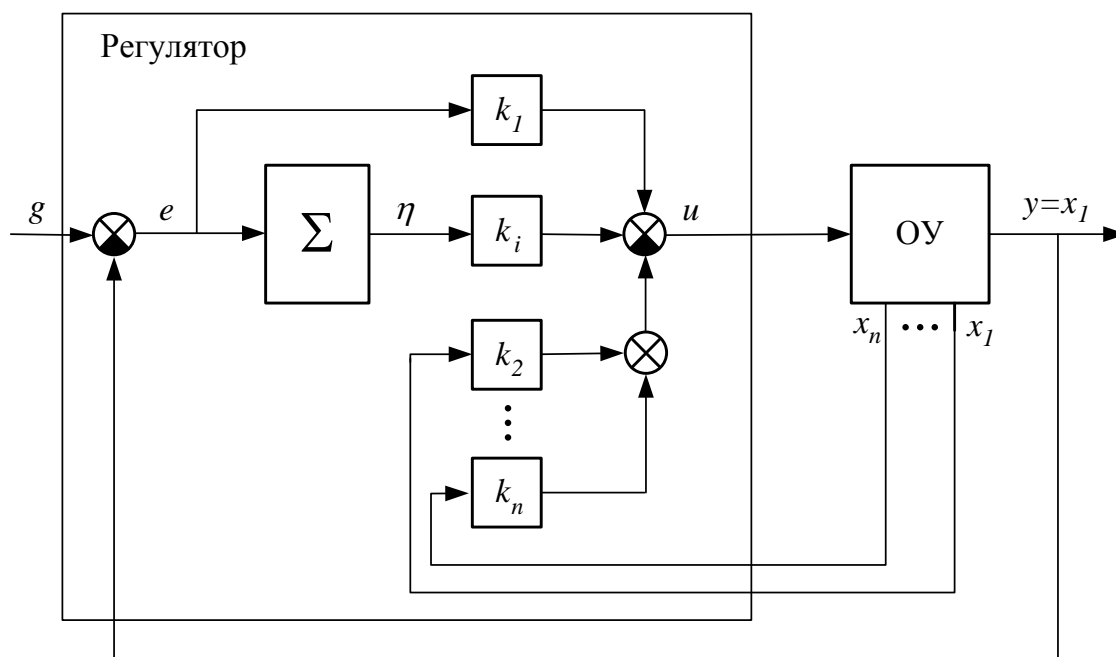


Рисунок 3.2 – Схема системы управления с дискретным аналогом интегрального регулятора

ОУ – с полной информацией, т.е. все переменные вектора состояния измеряются. Пара  $A, B$  полностью управляема; пара  $C, A$  полностью наблюдаема, т.е. в выходе проявляются все собственные движения, при-

чем  $C: y = x_1$  (регулируемая переменная совпадает с первой компонентой вектора состояния)  $C = [1 \ 0 \dots 0], 1 \times n$ .

Требуется построить систему для слежения за задающим воздействием  $g$  в предположении, что измеряется ошибка  $e = g - y$ , которая обеспечивает заданные требования к качеству переходных процессов.

*Замечание:* в данном случае имеются измерители рассогласования  $e$  и переменных вектора состояния  $x_2, x_3, \dots, x_n$  ( $e = g - y = g - x_1$ ), т.е.  $x_1$  измеряется косвенно.

Так как в дискретном времени интегратор представляется накапливающим сумматором, то будем строить интегральный регулятор, описание которого задается уравнением

$$\begin{cases} v(m+1) = v(m) + e(m); v(0) = 0 \\ u(m) = k_i e(m) + k_i v(m) - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m), \end{cases}$$

где  $v \in R^1$  – состояние выходной переменной накапливающего сумматора (дискретного аналога интегратора);  $k_i$  – коэффициент передачи интегральной составляющей (суммарной);  $k_1, k_2, \dots, k_n$  – коэффициенты обратных связей по соответствующим переменным состояния.

Таким образом, интегральный регулятор определяется двумя уравнениями: первое – алгебраическое, второе – динамическое.

Ставится задача с помощью интегрального регулятора обеспечить в замкнутой системе наперед заданные желаемые корни или коэффициенты характеристического полинома, назначенные из требуемых показателей качества переходных процессов. Т.е., требуется определить параметры интегрального регулятора  $k_i, k_1, k_2, \dots, k_n$ , которые обеспечивают замкнутой системе желаемые корни  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*, z_{n+1}^*$ .

Для решения задачи перепишем уравнение формирования управляющих воздействий, подставив выражение для рассогласования  $e = g - x_1$ :

$$\begin{aligned} u(m) &= k_i g(m) + k_i v(m) - k_1 x_1(m) - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m) = \\ &= k_i g(m) - [-k_u, k_1, k_2, \dots, k_n] \begin{bmatrix} v(m) \\ x_1(m) \\ \vdots \\ x_n(m) \end{bmatrix} = k_i g(m) - [-k_u, k] \begin{bmatrix} v(m) \\ x(m) \end{bmatrix}, \\ k &= [k_1, k_2, \dots, k_n]. \end{aligned}$$

Введем уравнение движения расширенного объекта, присоединив к уравнениям движения объекта уравнение сумматора регулятора:

$$\begin{cases} v(m+1) = v(m) + g(m) - x_1(m) \\ x(m+1) = Ax(m) + Bu(m). \end{cases}$$

Перепишем полученное уравнение в блочном виде. Для этого введем составной вектор  $\begin{bmatrix} v(m+1) \\ x(m+1) \end{bmatrix} \cdots x_1 = Cx$ , тогда

$$\begin{bmatrix} v(m+1) \\ x(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(m) \\ x(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(m) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} g(m)$$

Обозначим через вектор  $\bar{x}$  расширенный вектор, составленный из выходного сумматора и  $x$ . Обозначим также

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad B_{1g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{k} = [-k_i, k].$$

С использованием введенных обозначений уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} \bar{x}(m+1) = \bar{A}\bar{x}(m) + \bar{B}u(m) + B_{1g}g(m) \\ u(m) = k_1g(m) - \bar{k}\bar{x}(m) \end{cases}$$

$$\bar{x}(m+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{k})\bar{x}(m) + (k_1\bar{B} + B_{1g})g(m).$$

Обозначим матрицу замкнутой системы

$$\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{k},$$

где  $\bar{B}_g = k_1\bar{B} + B_{1g} - (n+1) \times 1$  – матрица входов по управляющему воздействию. Тогда

$$\bar{x}(m+1) = \bar{F}\bar{x}(m) + \bar{B}_g g(m).$$

Вывод. Матрица  $\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{k}$  определяет динамические свойства замкнутой системы, т.е. качество переходных процессов. Задача синтеза интегрального регулятора сводится к отысканию такой матрицы линейных обратных связей  $\bar{k}$  размера  $1 \times (n+1)$  которая обеспечивает замкнутой системе наперед заданные желаемые корни  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n+1}^*$ . Т.е. задача синтеза интегрального регулятора может быть сведена к решению задачи модального управления, которая разрешима единственным образом при условии полной управляемости пары  $\bar{A}, \bar{B}$ . Эта пара будет полностью управляемой, если матрицы  $A, B$  полностью управляемы, а пара  $C, A$  полностью наблюдаема.

В результате получаем следующую последовательность синтеза дискретного аналога интегрального регулятора:

1. для ОУ заданы матрицы модели  $A, B$  и  $C$ ;
2. проверка пары  $A, B$  на полную управляемость, пары  $C, A$  на полную наблюдаемость;

3. по требуемым показателям качества процессов назначение  $n+1$  желаемых корней замкнутой системы  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n+1}^*$ ;
4. по желаемым корням назначение матриц дискретной эталонной модели – матрицы  $\bar{G} - (n+1) \times (n+1)$  и матрицы выходов  $\bar{H} - 1 \times (n+1)$  из условия полной наблюдаемости пары;
5. формирование матриц расширенного описания объекта

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix};$$

6. решение задачи модального управления: вычисление матрицы  $k$  обратных связей на основе матричного уравнения Сильвестра:

$$\begin{aligned} \bar{M}\bar{G} - \bar{A}\bar{M} &= -\bar{B}\bar{H} \\ \bar{k} &= \bar{H}\bar{M}^{-1}, \end{aligned}$$

где  $\bar{M}$  – матрица размера  $(n+1) \times (n+1)$ .

Полученные значения матрицы линейных обратных связей  $\bar{k}$  и являются искомым решением задачи синтеза регулятора.

### 3.6 Построение регуляторов со встроенной моделью

Метод встроенной модели позволяет улучшать точностные показатели качества системы, а именно позволяет получить нулевую ошибку в установившемся режиме для заданного класса внешних воздействий, модель которых задается автономным разностным уравнением.

Рассмотрим следящую систему с функциональной схемой, показанной на рисунке 3.3. На рисунке 3.3 обозначены:  $y$  – регулируемая переменная;  $g$  – задающее воздействие; MBV – модель внешних воздействий.

На рисунке 3.4 показана структурная схема следящей системы со встроенной моделью. На рисунке обозначены:  $e$  – ошибка слежения  $e = g - y$ ;  $\eta - q$  – мерный вектор состояний встроенной модели,  $K_\eta$  – матрица размера  $1 \times q$  коэффициентов прямых связей по состоянию встроенной модели,  $K_\eta = [k_{1\eta} \quad k_{2\eta} \quad \dots \quad k_{q\eta}]$ ,  $k_1, \dots, k_n$  – коэффициенты обратных связей по соответствующим переменным вектора состояния.

Будем полагать, что в результате анализа задающих воздействий выделены воздействия, приводящие к наиболее существенным ошибкам в установившемся режиме, и класс этих воздействий генерируется линейным автономным разностным уравнением. Другими словами, будем считать, что получена модель внешних воздействий (MBV) в виде

$$\begin{aligned} \xi(m+1) &= \Gamma \xi(m) \\ g(m) &= H_\xi \xi(m), \end{aligned}$$

где  $\xi \in R^q$  – вектор состояния МВВ;  $\Gamma - q \times q$  – матрица, задание которой определяет виды внешних воздействий;  $H_\xi - 1 \times q$  – матрица выходов МВВ.

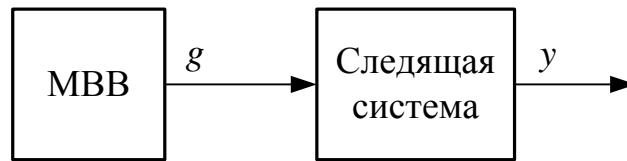


Рисунок 3.3 – Схема системы управления

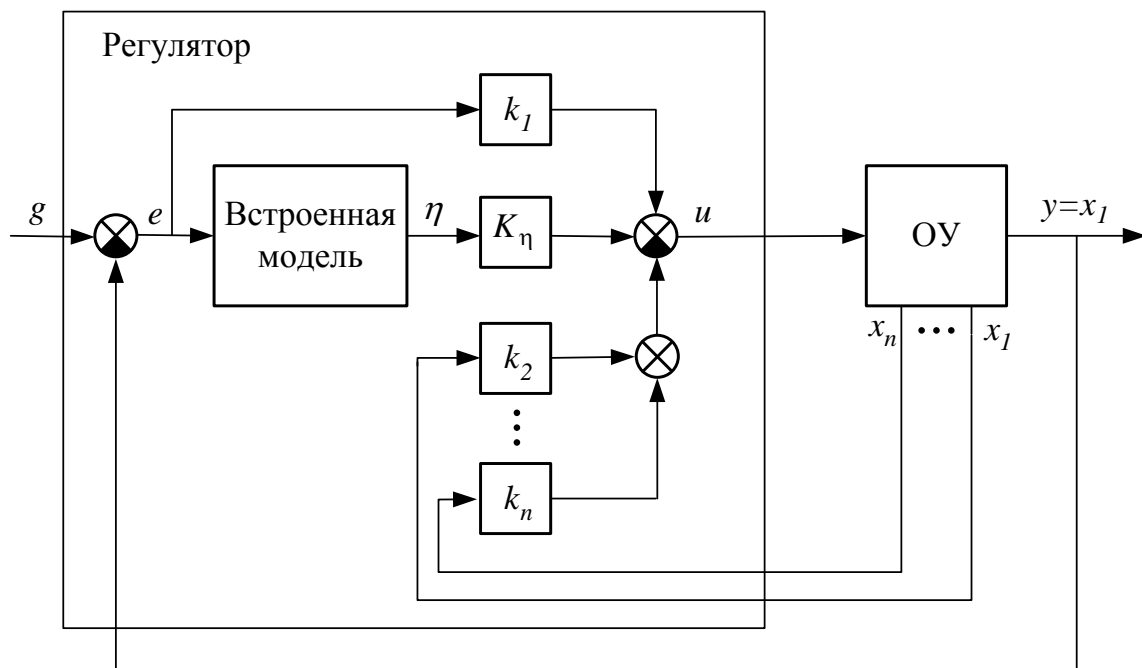


Рисунок 3.4 – Структурная схема следящей системы

Класс внешних воздействий, генерируемый моделью, определяется решением этого уравнения, т.е. определяется формулой

$$g(m) = H_\xi \Gamma^m \xi(0). \quad (3.2)$$

Задано уравнение движения ОУ в виде

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m), \end{cases}$$

где  $x \in R^n$ ;  $y$  – регулируемая величина, причем

$$y = x_1; B - n \times 1; A - n \times n; C - 1 \times n, \\ C = [1 \quad \dots \quad 0 \quad 0].$$

Будем полагать, что измеряются ошибка  $e = g - y$  и переменные вектора состояния  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , а также что пара  $A, B$  полностью управляема, пара  $C, A$  полностью наблюдаема.

Синтезируем регулятор со встроенной моделью, описание которого задается уравнениями

$$\begin{aligned}\eta(m+1) &= \Gamma \eta(m) + B_\eta e(m) \\ u(m) &= k_1 e(m) + k_\eta \eta_m - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m),\end{aligned}$$

где  $\eta \in R^q$  – вектор состояния встроенной модели, по размерности совпадающий с вектором состояния внешних воздействий;  $\Gamma - q \times q$  – матрица, совпадающая с матрицей MBV;  $B_\eta$  – матрица входов встроенной модели (MBVM).

MBVM выбирается из условия полной управляемости пары  $\Gamma, B_\eta$ . Задача синтеза регулятора состоит в нахождении коэффициентов обратной связи  $k_1, k_2, \dots, k_n$  и матрицы коэффициентов  $K_\eta$ , обеспечивающих в замкнутой системе желаемое качество процессов.

Если воспользоваться методом модального управления, то искомые параметры регулятора должны обеспечивать в замкнутой системе желаемые корни или коэффициенты характеристического полинома, назначенного из требуемых показателей качества.

Замечание. Приведенная структура регулятора со встроенной моделью при условии устойчивости замкнутой системы обеспечивает нулевую установившуюся ошибку для заданного класса задающих воздействий (3.2).

Сведем задачу синтеза регулятора к задаче модального управления. Рассмотрим формирование задающих воздействий и подставим вместо ошибки разность  $g - y$ , получим

$$\begin{aligned}U(m) &= k_1 g(m) + k_\eta \eta(m) - k_1 x_1(m) - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m) \\ &= k_1 g(m) + k_\eta \eta(m) - kx(m) = \\ &= k_1 g(m) - [-K_\eta \quad k] \begin{bmatrix} \eta(m) \\ x(m) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

где  $k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$  – матрица обратных связей, причем

$$\bar{k} = [-K_\eta, k], \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \eta \\ x \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение расширенную модель ОУ, объединив уравнение движения объекта с уравнением встроенной модели:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) + B_\eta g(m) - B_\eta y(m) \\ x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}$$

и расширенный вектор состояния

$$\begin{bmatrix} \eta(m+1) \\ x(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(m) \\ x(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(m) + \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix} g(m).$$

Получаем уравнение

$$\bar{x}(m+1) = \bar{A}\bar{x}(m) + \bar{B}u(m) + \bar{B}_1 g(m),$$

матрицы которого равны

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения движения системы будут иметь вид

$$\begin{cases} \bar{x}(m+1) = \bar{A}\bar{x}(m) + \bar{B}u(m) + \bar{B}_1 g(m) \\ u(m) = k_1 g(m) - \bar{k}\bar{x}(m) \end{cases}$$

или

$$\bar{x}(m+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{k})\bar{x}(m) + (\bar{B}_1 + k_1 \bar{B})g(m),$$

где  $\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{k}$  – матрица размера  $(n+q) \times (n+q)$ , определяющая динамические свойства замкнутой системы;  $\bar{B}_g = \bar{B}_1 - \bar{B}\bar{k}_1$  – матрица размера  $(n+q) \times 1$  входов по задающему воздействию.

Если пара  $\bar{A}, \bar{B}$  полностью управляема, то выбором матрицы  $\bar{k}$  можно обеспечить произвольные желаемые корни характеристического полинома или коэффициенты уравнения замкнутой системы. Отметим, что пара  $\bar{A}, \bar{B}$  будет полностью управляема при выполнении следующих условий:

1. пара  $A, B$  объекта полностью управляема, а пара  $C, A$  полностью наблюдаема;
2. пара  $\Gamma, B_\eta$  полностью управляема.

## 4 Аналитические методы построения регуляторов цифровых систем для объектов и внешних воздействий с ограничениями на измеряемые переменные

### 4.1 Устройство оценки полной размерности и способы проектирования

Как уже отмечалось, устройство оценки вектора состояния объекта управления предназначено для восстановления (выработки) недоступных

для измерения переменных вектора состояния. Устройства оценки вырабатывают оценки переменных вектора состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Рассмотрим уравнение движения ОУ с неполной информацией:

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_u(m) = C_u \cdot x(m), \end{cases}$$

где  $x \in R^n$ ;  $u \in R^k$ ;  $y_u \in R^l$  – векторы состояния, управления и вектор изменяемых величин;  $A - n \times n$ ;  $B - n \times k$  – матрицы параметров объекта;  $C_u - l \times k$  – матрица измерений. Предполагается, что для объекта с неполной информацией число измерений  $l$  меньше числа  $n$  переменных вектора состояния ОУ, т. е.  $l < n$ , и  $\text{rank} C_u = l$ , другими словами, нет дублирующих друг друга измерений.

Будем строить устройство оценки полной размерности как динамическую систему с уравнением движения

$$v(m+1) = A \cdot v(m) + L \cdot (y_u(m) - C_u \cdot v(m)) + B \cdot u(m), \quad v(0) = 0,$$

где  $v \in R^n$  – вектор состояния устройства оценки, по размерности совпадающий с размерностью вектора состояния исходного ОУ;  $A, B, C_u$  – матрицы описания объекта;  $L$  – матрица входов устройства оценки размера  $(n \times l)$ .

Задача построения устройства оценки полной размерности состоит в отыскании такой матрицы входов данного устройства  $L$ , которая обеспечивает сходимость вектора оценки  $v \in R^n$  к оцениваемому вектору  $x \in R^n$  со скоростью сходимости, назначенной из желаемых динамических свойств.

Для определения условий, при которых рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки, вычтем из уравнения движения этой системы уравнение движения объекта, получим

$$v(m+1) - x(m+1) = A \cdot v(m) + L \cdot (C_u \cdot x(m) - C_u \cdot v(m)) + B \cdot u(m) - A \cdot x(m) - B \cdot u(m).$$

Группируя члены этого уравнения, приходим к уравнению

$$v(m+1) - x(m+1) = A \cdot (v(m) - x(m)) - L \cdot C_u \cdot (v(m) - x(m)),$$

из которого следует

$$v(m+1) - x(m+1) = (A - L \cdot C_u) \cdot (v(m) - x(m)).$$

Обозначая разность векторов состояний

$$\tilde{x}(m) = v(m) - x(m)$$

как вектор невязки, а матрицу

$$F_v = A - L \cdot C_u$$

как матрицу, определяющую динамические свойства устройства оценки, приходим к уравнению движения относительно вектора невязки

$$\tilde{x}(m+1) = F_v \cdot \tilde{x}(m).$$

Полученное уравнение является автономным, поэтому свойство сходимости вектора невязки к нулю целиком и полностью определяется свойствами матрицы  $F_v$ . Таким образом, рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки с вектором оценки  $v \in R^n$  тогда и только тогда, когда матрица  $F_v = A - L \cdot C_u$  является устойчивой матрицей, то есть все корни ее характеристического полинома расположены в круге единичного радиуса с центром в начале координат.

Рассмотрим процедуру синтеза устройства оценки полной размерности на основе метода модального управления. Она складывается из следующей последовательности действий для вычисления матрицы обратных связей  $L$ :

1. проверка пары  $C_u, A$  на выполнение условия полной наблюдаемости;
2. назначение  $n$  желаемых корней устройства оценки  $z_{1v}^*, \dots, z_{nv}^*$  (коэффициентов характеристического полинома), исходя из желаемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору. Как правило, эти корни назначаются несколько более “быстрыми”, чем корни для синтеза матрицы обратных связей;
3. по желаемым корням формирование матрицы эталонной модели  $\Gamma - n \times n$  и выбор матрицы выходов  $H_v$  размера  $l \times n$  эталонной модели из условия полной наблюдаемости пары  $H_v, \Gamma_v$ ;
4. решение матричного уравнения Сильвестра  $M_v \cdot \Gamma_v - A^T \cdot M_v = -C_u \cdot H_v$  относительно матрицы  $M_v$ ;
5. вычисление матрицы входов устройства оценки  $L$  по соотношению  $L = H \cdot M^{-1}$ .

Синтез устройства оценки полной размерности может быть выполнен на основе метода локальной оптимизации. При таком подходе предполагается, что на объект управления воздействуют шумы в управлении и имеют место шумы в измерениях. Матрица входов устройства оценки  $L$  в этом случае ищется из условия минимизации математического ожидания от квадратичного функционала, как правило, на бесконечном интервале времени, что сводится к решению матричного уравнения типа Риккати. Отметим, что устройство оценки полной размерности подобно по структуре фильтру Калмана. Отличия состоят в критерии нахождения матрицы входов устройства оценки  $L$  и модели исходного объекта.

## 4.2 Устройство оценки пониженной размерности и способы проектирования

Идеология построения устройства оценки пониженной размерности заключается в использовании измеряемых переменных при формировании вектора оценки. При этом удастся понизить размерность устройства оценки по сравнению с размерностью оцениваемого вектора состояния на количество измерений, что упрощает реализацию устройства оценки. Устройства оценки как полной, так и пониженной размерностей предназначены для выработки информации о поведении недоступных для измерения переменных состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Рассмотрим объект управления с неполной информацией с уравнением движения в форме «вход-состояние-выход»

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_u(m) = C_u \cdot x(m), \end{cases}$$

где  $x \in R^n$ ;  $u \in R^k$ ;  $y_u \in R^l$  – вектор изменяемых величин;  $A - n \times n$ ;  $B - n \times k$  – матрицы модели объекта управления;  $C_u - l \times n$  – матрица измерений. Предполагается, что для объекта с неполной информацией число измерений  $l$  меньше числа переменных вектора состояния ОУ  $n$ , т. е.  $l < n$  и  $\text{rank} C_u = l$ , другими словами, нет дублирующих друг друга измерений. Предполагается, что пара матриц  $A, B$  – полностью управляема, пара  $C_u, A$  – полностью наблюдаема.

Будем строить устройство оценки пониженной размерности в соответствии со следующим уравнением движения:

$$\begin{cases} v(m+1) = F_v \cdot v(m) + G \cdot y_u(m) + M \cdot B \cdot u(m) \\ \hat{x}(m) = \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix}, \end{cases} \quad v(0) = 0,$$

где  $v \in R^{n-l}$  – вектор состояния устройства оценки, размерность которого меньше размерности оцениваемого вектора состояния на число измерений;  $\hat{x}(m) \in R^n$  – вектор оценки, формируемый по вектору измеряемых переменных и вектору состояния устройства оценки;  $F_v - (n-l) \times (n-l)$  – матрица, определяющая динамические свойства устройства оценки;  $G - (n-l) \times l$  – матрица входов устройства оценки;  $M - (n-l) \times n$  – матрица линейных преобразований, согласующая размерности векторов состояния ОУ и устройства оценки. Из уравнения движения устройства оценки следует, что задача построения устройства оценки пониженной размерности заключается в выборе таких матриц описания устройства  $F_v$  и матрицы входов  $G$ , а также матрицы преобразования  $M$ , которые позволяют полу-

чить вектор оценки при заданной скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору.

Определим условия, при которых рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки. Для этого вычтем из уравнения движения устройства оценки уравнение движения объекта управления, умноженное слева на матрицу преобразования  $M$ . Получим:

$$\begin{aligned} v(m+1) - M \cdot x(m+1) = \\ F_v \cdot v(m) + G \cdot C_u x(m) + M \cdot B \cdot u(m) - M \cdot A \cdot x(m) - M \cdot B \cdot u(m), \end{aligned}$$

или

$$v(m+1) - M \cdot x(m+1) = F_v \cdot v(m) + (G \cdot C_u - M \cdot A) \cdot x(m).$$

Положим, что выполняется матричное уравнение типа Сильвестра вида

$$M \cdot A - F_v \cdot M = G \cdot C_u.$$

Тогда справедливо уравнение

$$v(m+1) - M \cdot x(m+1) = F_v \cdot (v(m) - M \cdot x(m)),$$

и если введем вектор невязки по соотношению

$$\tilde{v}(m) = v(m) - M \cdot x(m),$$

то относительно вектора невязки получим уравнение

$$\tilde{v}(m+1) = F_v \cdot \tilde{v}(m).$$

Это уравнение является автономным, поэтому свойство сходимости вектора невязки к нулю целиком и полностью определяется свойствами матрицы  $F_v$ . Таким образом, рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки с вектором оценки

$$\hat{x}(m) = \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix}$$

тогда и только тогда, когда матрица  $F_v$  является устойчивой матрицей, то есть все корни ее характеристического полинома расположены в круге единичного радиуса с центром в начале координат.

В результате получаем следующую процедуру синтеза устройства оценки пониженной размерности:

1. формирование матриц описания устройства  $A$ ,  $B$  и  $C_n$ ;
2. проверка  $C_n$ ,  $A$  на полную наблюдаемость,  $\text{rank } C_u = I$ ;
3. исходя из требуемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору, назначение  $n-1$  желаемых корней характеристического полинома (или коэффициентов);

4. по желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома формирование матрицы описания устройства оценки  $F_v - (n - 1) \times (n - 1)$  в одном из канонических видов и выбор матрицы входов устройства оценки  $G - (n - 1) \times 1$  из условия полной управляемости пары  $F_v, G$

$$(M \cdot A - F_v \cdot M) = G \cdot C_u;$$

5. решение уравнения типа Сильвестра относительно матрицы преобразования  $M - (n - 1) \times n$ ;

6. нахождение произведения  $MB$  и вычисление матриц  $E, D$  по соотношению

$$\begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1}.$$

### 4.3 Проектирование динамического регулятора с устройством оценки полной размерности

Совокупность устройства оценки и устройства, реализующего соотношение

$$u(m) = -k \cdot \hat{x}(m)$$

где  $u$  – вектор управляющих воздействий;  $k$  – матрица линейных обратных стационарных связей;  $\hat{x}$  – вектор невязки, будем называть динамическим регулятором.

Устройства оценки предназначены для выработки информации о поведении недоступных для измерения переменных состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Рассмотрим задачу синтеза динамического регулятора.

Задано уравнение движения ОУ с неполной информацией:

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_u(m) = C_u \cdot x(m). \end{cases}$$

где  $x \in R^n$ ;  $u \in R^k$ ;  $y_u \in R^l$  – векторы состояния, управления и измеряемых величин;  $A - n \times n$ ;  $B - n \times k$  – матрицы модели ОУ;  $C_u - l \times k$  – матрица измерений. Для объекта с неполной информацией число измерений  $l < n$  и  $\text{rank } C_u = l$ . Пары матриц  $A, B$  – полностью управляемая,  $C_u, A$  – полностью наблюдаемая.

Будем строить динамичный регулятор с устройством оценки полной размерности в соответствии со следующими уравнениями:

$$v(m+1) = A \cdot v(m) + L \cdot (y_u(m) - C_u \cdot v(m) + B \cdot u(m)),$$

$$v(0) = 0,$$

$$u(m) = -k_v \cdot (m),$$

где  $v \in R^n$  – вектор состояния устройства оценки;  $A, B, C_u$  – матрицы описания ОУ;  $L$  – матрица входов устройств оценки размера  $(n \times l)$ ;  $K$  – матрица обратных связей размера  $k \times n$ .

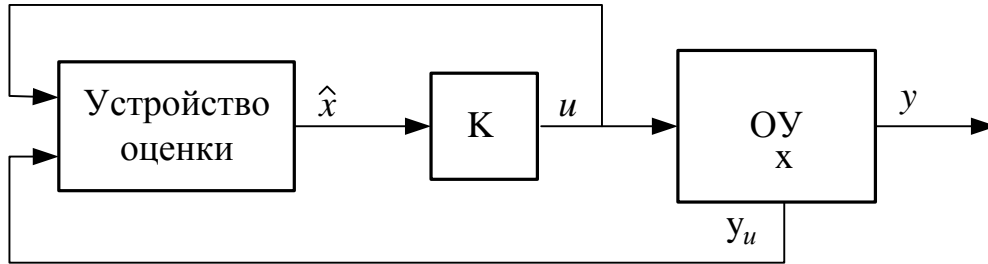


Рисунок 4.1 – Схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки полной размерности

Задача синтеза динамического регулятора состоит в отыскании таких неизвестных матриц  $L$  и  $k$ , которые обеспечивают желаемые динамические свойства в замкнутой системе.

Схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки полной размерности представлена на рисунке 4.1.

Объединим уравнение движения объекта и уравнение движения динамического регулятора:

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_u(m) = C_u \cdot x(m) \\ v(m+1) = A \cdot v(m) + L \cdot (y_u(m) - C_u \cdot v(m)) + B \cdot u(m) \\ u(m) = -k \cdot v(m). \end{cases}$$

Для упрощения описания вычтем из третьего уравнения уравнение описания устройства оценки; а из первого уравнения вычтем уравнение объекта. Получим:

$$\begin{aligned} v(m+1) - x(m+1) &= \\ A \cdot v(m) + L \cdot (C_u \cdot x(m) - C_u \cdot v(m)) + B \cdot u(m) - A \cdot x(m) - B \cdot u(m) \\ v(m+1) - x(m+1) &= A \cdot (v(m) - x(m)) - L \cdot C_u \cdot (v(m) - x(m)) \\ v(m+1) - x(m+1) &= (A - L \cdot C_u) \cdot (v(m) - x(m)), \end{aligned}$$

где  $\tilde{x}(m) = v(m) - x(m)$  – вектор невязки. Обозначим

$$F_v = A - L \cdot C_u,$$

тогда

$$\tilde{x}(m+1) = F_v \cdot \tilde{x}(m).$$

Перепишем уравнение движения замкнутой системы относительно вектора невязки:

$$\begin{cases}
x(m+1) = A \cdot x(m) - B \cdot k \cdot v(m) \\
\tilde{x}(m+1) = F_v \cdot \tilde{x}(m), \\
v(m) = \tilde{x}(m) + x(m) \\
x(m+1) = A \cdot x(m) - B \cdot k \cdot \tilde{x}(m) - B \cdot k \cdot x(m) \\
x(m+1) = (A - B \cdot k) \cdot x(m) - B \cdot k \cdot \tilde{x}(m) \\
F = A - B \cdot k,
\end{cases}$$

получим

$$\begin{cases}
x(m+1) = F \cdot x(m) - B \cdot k \cdot \tilde{x}(m) \\
\tilde{x}(m+1) = F_v \cdot \tilde{x}(m).
\end{cases}$$

Перепишем эти уравнения в блочно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x(m+1) \\ \tilde{x}(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -B \cdot k \\ 0 & F_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(m) \\ \tilde{x}(m) \end{bmatrix},$$

$\bar{F} = \begin{bmatrix} F & -B \cdot k \\ 0 & F_v \end{bmatrix}$  – матрица описания замкнутой системы. Размер матрицы  $\bar{F} - 2n \times 2n$ .

Из верхнетреугольного вида матрицы  $\bar{F}$  следует, что свойства замкнутой системы зависят от свойств матрицы  $F = A - B \cdot k$  и свойств матрицы  $F_v = A - L \cdot C_u$ ; определитель матрицы замкнутой системы равен произведению определителей матриц  $F$  и  $F_v$ , а корни характеристического уравнения объединяют корни характеристических уравнений матриц  $F$  и  $F_v$ ,

$$\det[\bar{F} - z \cdot I_{2n \times 2n}] = \det[F - z \cdot I_{n \times n}] \det[F_v - z \cdot I_{n \times n}] = 0$$

Отсюда следует, что если  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$  – корни матрицы  $F$ ,  $z_{1v}^*, z_{2v}^*, \dots, z_{nv}^*$  – корни матрицы  $F_v$ , то корни матрицы  $\bar{F}$  будут равны  $\underbrace{z_1^*, \dots, z_n^*, z_{1v}^*, \dots, z_{nv}^*}_{2n}$ .

Из полученного следует свойство разделения, которое заключается в следующем:

1.  $n$  желаемых корней замкнутой системы можно обеспечить выбором матрицы обратных связей  $k$ , т.е. если  $A, B$  – полностью управляемая пара, то существует матрица  $k$  такая, что  $n$  собственных чисел матрицы  $F = A - B \cdot k$  равны  $z_1^*, \dots, z_n^*$

2. оставшиеся  $n$  желаемых корней можно обеспечить выбором матрицы входов устройства оценки  $C_u$ , т.е. если  $C_u, A$  – полностью наблюдаемая пара, то существует матрица  $L$  такая, что  $n$  желаемых собственных чисел матрицы  $F_v = A - L \cdot C_u$  равны  $z_{1v}^*, \dots, z_{nv}^*$ .

В результате получаем следующую процедуру синтеза динамического регулятора с устройством оценки полной размерности на основе метода модального управления:

#### I. Синтез матрицы обратных связей $k$

1. проверка пары  $A, B$  на полную управляемость;
2. выбор  $n$  желаемых корней  $z_1^*, \dots, z_n^*$  или желаемых коэффициентов характеристического полинома исходя из требуемых показателей количества;
3. по желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома назначение матрицы эталонной модели  $\Gamma - n \times n$ , и выбор матрицы выходов эталонной модели  $H - n \times n$  из условия полной наблюдаемости;
4. решение матричного уравнения Сильвестра  $M \cdot \Gamma - A \cdot M = -B \cdot H$  относительно матрицы  $H - n \times n$  с последующим вычислением матрицы обратных связей  $k = H \cdot M^{-1}$ ;
5. Проверка пары  $C_u, A$  на полную наблюдаемость.

#### II. Синтез матрицы входов устройства оценки $L$

1. назначение оставшихся  $n$  желаемых корней замкнутой системы  $z_{1v}^*, \dots, z_{nv}^*$  (коэффициентов характеристического полинома), исходя из желаемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору. Как правило, эти корни назначаются несколько более “быстрыми”, чем корни для синтеза матрицы обратных связей  $k$ ;
2. по желаемым корням формирование матрицы эталонной модели  $\Gamma - n \times n$  и выбор матрицы выходов  $H_v$  устройства эталонной модели из условия полной наблюдаемости пары  $H_v, \Gamma_v$ ;
3. решение матричного уравнения Сильвестра  $M_v \cdot \Gamma_v - A^T \cdot M_v = -C_u^T \cdot H_v$  относительно матрицы входов  $L^T = H_v \cdot M_v^{-1}$ .

### 4.4 Проектирование динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности

Динамическим регулятором будем называть совокупность устройства оценки и устройства, реализующего соотношение

$$u(m) = -k \cdot \hat{x}(m),$$

где  $u$  – вектор управляющих воздействий;  $k$  – матрица линейных обратных стационарных связей;  $\hat{x}$  – вектор невязки.

Устройства оценки предназначены для выработки информации о поведении недоступных для измерения переменных состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Пусть задан объект управления с неполной информацией с уравнением движения:

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_n(m) = C_H \cdot x(m) \end{cases}$$

$$x \in R^n; u \in R^k; y_n \in R^l, (l < n),$$

причем пара  $A, B$  полностью управляема; пара  $C_H, A$  полностью наблюдаема;  $\text{rank } C_H = l$ .

Будем строить динамический регулятор с устройством оценки пониженной размерности по следующим уравнениям движения замкнутой системы:

$$\begin{cases} v(m+1) = F_v \cdot v(m) + G \cdot y_u(m) + M \cdot B \cdot u(m) \\ \hat{x}(m) = \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix} \\ u(m) = -K \cdot \hat{x}(m), \end{cases} \quad v(0) = 0,$$

где  $v \in R^{n-l}$  – вектор состояния устройства оценки;  $\hat{x}(m) \in R^n$  – вектор оценки вектора состояния объекта управления;  $F_v - (n-l) \times (n-l)$  определяет свойства устройства оценки;  $G - (n-l) \times l$  – матрица входов устройства оценки;  $M - (n-l) \times n$  – матрица входов устройства оценки;  $K - k \times n$  – матрица регулятора.

Задача синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности заключается в выборе таких матриц описания устройства оценки  $F_v$  и  $G$ , а также матрицы преобразования  $M$  и матрицы обратных связей  $k$ , которые обеспечивают замкнутой системе желаемые динамические свойства.

Структурная схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности представлена на рисунке 4.2.

Рассмотрим свойства замкнутой системы с управлением:

$$u(m) = -K \cdot \hat{x}(m) = -K \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix} = -E \cdot y_u(m) - D \cdot v(m),$$

или

$$u(m) = -[E, \quad D] \cdot \begin{bmatrix} y_u(m) \\ v(m) \end{bmatrix},$$

где введена блочная матрица  $[E, D] = K \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1}$ , определяющая матрицу коэффициентов пропорционального управления, т.е.  $[E, D] \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix} = K$ , или  $K = E \cdot C_u + D \cdot M$ , причем размеры матриц равны  $E - k \times l$  и  $D - k \times (n - l)$ .

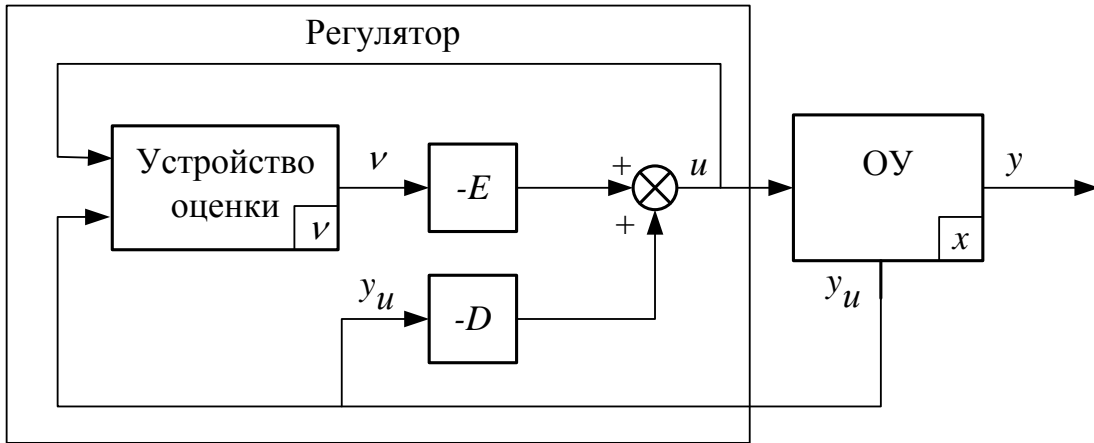


Рисунок 4.2 – Структурная схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности

Запишем уравнение движения замкнутой системы, объединив уравнения движения объекта и динамического регулятора. Уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ y_u(m) = C_u \cdot x(m) \\ v(m+1) = F_v \cdot v(m) + G \cdot y_u(m) + M \cdot B \cdot u(m) \\ u(m) = -E \cdot y_u(m) - D \cdot v(m) \end{cases}$$

Вычтем из уравнения движения устройства оценки уравнение движения объекта, слева умноженное на матрицу преобразования  $M$ , получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v(m+1) - M \cdot x(m+1) &= \\ &= F_v \cdot v(m) + G \cdot C_u \cdot x(m) + M \cdot B \cdot u(m) - M \cdot A \cdot x(m) - M \cdot B \cdot u(m) \\ v(m+1) - M \cdot x(m+1) &= F_v \cdot v(m) + (G \cdot C_u - M \cdot A) \cdot x(m), \\ G \cdot C_u - M \cdot A &= -F_v \cdot M, \\ M \cdot A - F_v \cdot M &= G \cdot C_u, \end{aligned}$$

$$v(m+1) - M \cdot x(m+1) = F_v \cdot (v(m) - M \cdot x(m)),$$

$$\tilde{v}(m) = v(m) - M \cdot x(m),$$

где  $\tilde{v}(m+1) = F_\eta \cdot \tilde{v}(m)$  – вектор невязки. Тогда для замкнутой системы справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} x(m+1) = A \cdot x(m) + B \cdot u(m) \\ \tilde{v}(m+1) = F_\eta \cdot \tilde{v}(m) \\ u(m) = -E \cdot C_u x(m) - D \cdot v(m), \end{cases}$$

$$x(m+1) = A \cdot x(m) - B \cdot E \cdot C_u \cdot x(m) - B \cdot D \cdot v(m),$$

$$\tilde{v}(m+1) = F \cdot \tilde{v}(m),$$

$$\tilde{v} = v - M \cdot x,$$

$$v(m) = \tilde{v}(m) + M \cdot x(m),$$

$$\begin{cases} x(m+1) = (A - B \cdot E \cdot C_u - B \cdot D \cdot M) \cdot x(m) - B \cdot D \cdot \tilde{v}(m) \\ \tilde{v}(m+1) = F_\eta \cdot \tilde{v}(m), \end{cases}$$

$$x(m+1) = (A - B \cdot (E \cdot C_u + D \cdot M)) \cdot x(m) - B \cdot D \cdot \tilde{v}(m),$$

$$x(m+1) = (A - B \cdot k) \cdot x(m) - B \cdot D \cdot \tilde{v}(m),$$

$$F = A - F \cdot k,$$

$$\begin{cases} x(m+1) = F \cdot x(m) - B \cdot D \cdot \tilde{v}(m) \\ \tilde{v}(m+1) = F_v \cdot \tilde{v}(m). \end{cases}$$

Перепишем уравнение движения системы в блочной матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x(m+1) \\ \tilde{v}(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -B \cdot D \\ 0 & F_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(m) \\ \tilde{v}(m) \end{bmatrix},$$

где  $\bar{F} = \begin{bmatrix} F & -B \cdot D \\ 0 & F_v \end{bmatrix}$  – матрица описания замкнутой системы. Из верхнетреугольного вида блочной матрицы следует, что характеристическое уравнение замкнутой системы определяется произведением характеристических матриц  $F$  и  $F_v$ , а корни замкнутой системы есть объединение корней характеристических уравнений матриц  $F$  и  $F_v$ , т.е.

$$\det[\bar{F} - zI_{(2n-l)(2n-l)}] = \det[F - zI_{n \times n}] \times \det[F_v - zI_{(n-l)(n-l)}]$$

$2n-l \qquad \qquad n \qquad \qquad n-l$

Если обозначить  $z_1, z_2, \dots, z_n$  – корни характеристического уравнения матрицы  $F$ , а  $z_{1v}, z_{2v}, \dots, z_{n-lv}$  – корни характеристического уравнения матрицы  $F_v$ , то корни характеристического уравнения матрицы  $\bar{F}$  будут равны

$$z_1, z_2, \dots, z_n, z_{1v}, z_{2v}, \dots, z_{n-lv}.$$

В рассматриваемом случае также справедливо свойство разделения:

1.  $n$  желаемых корней замкнутой системы можно обеспечить выбором матрицы обратных связей  $K$ , т.е. для матрицы  $F = A - BK$ ;
2. оставшиеся  $n-1$  корней можно обеспечить назначением матрицы описания устройства оценки  $F_v$ .

Рассмотрим процедуру синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности с использованием метода модального управления.

Динамический регулятор описывается уравнениями

$$\begin{cases} v(m+1) = F_v \cdot v(m) + G \cdot y_u(m) + M \cdot B \cdot u(m) \\ u(m) = -E \cdot y_u(m) - D \cdot v(m), \end{cases} \quad v(0) = 0,$$

причем для того, чтобы подсистема, описываемая первым уравнением, была бы устройством оценки, требуется выполнение матричного уравнения типа Сильвестра

$$K = E \cdot C_u + D \cdot M$$

и условия, что матрица  $F_v$  должна быть устойчивой матрицей.

Отсюда следует, что задача синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности состоит в отыскании матрицы линейных стационарных обратных связей  $K$ , обеспечивающих  $n$  желаемых корней в замкнутой системе, назначенных из требуемых показателей качества, предъявляемых к системе. Матрица  $F_v$ , определяющая динамические свойства устройства оценки, формируется по характеристическому полиному или его корням, назначенным из требуемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору. Матрица  $G$  выбирается из условия полной управляемости пары  $F, G$ . Матрица  $M$  находится из уравнения типа Сильвестра, а матрицы  $E$  и  $D$  – из формульной связи матриц  $K, E$  и  $D$ .

Процедура синтеза регулятора сводится к выполнению следующих шагов.

#### 1. Определение матрицы $K$

- 1.1 проверка пары матриц  $A, B$ . Она должна быть полностью управляема;
- 1.2 по требованиям к динамическим свойствам замкнутой системы назначение  $n$  желаемых корней замкнутой системы или коэффициентов характеристического полинома;
- 1.3 по желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома формирование матриц эталонной модели  $\Gamma$  в одном из канонических видов и выбор матрицы выходов эталонной модели  $H$  из условия полной наблюдаемости пары  $H, \Gamma$ ;
- 1.4 решение матричного уравнения типа Сильвестра

$$\bar{M} \cdot \Gamma - A \cdot \bar{M} = -B \cdot H$$

относительно матрицы  $\overline{M}$  размера  $n \times n$ ;

1.5 вычисление матрицы линейных стационарных обратных связей  $K = H \cdot M^{-1}$ .

## 2. Формирование матриц описания устройства оценивания

2.1 проверка  $C_u, A$  на полную наблюдаемость, должно выполняться условие  $\text{rank } C_u = l$ ;

2.2 исходя из требуемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору состояния, назначение оставшихся  $n-l$  желаемых корней характеристического полинома (или его коэффициентов);

2.3. по желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома формирование матрицы описания устройства оценки  $F_v$  размера  $(n-l) \times (n-l)$  в одном из канонических базисов и выбор матрицы входов устройства оценки  $G$  размера  $(n-l) \times 1$  из условия полной управляемости пары  $F_v, G$ ;

2.4 решение уравнения типа Сильвестра

$$(M \cdot A - F_v \cdot M) = G \cdot C_u$$

относительно матрицы преобразования  $M$  размера  $(n-l) \times n$ ;

2.5 нахождение произведения МВ и вычисление матриц  $E, D$  по соотношению  $[E, D] = K \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ M \end{bmatrix}^{-1}$ .

## 5 Системы пространственного слежения

### 5.1 Модели систем пространственного слежения

К системам пространственного слежения относятся следующие системы, предназначенные для автоматического сопровождения и выработки пространственных координат подвижных объектов, перемещающихся в пространстве по неизвестной траектории. К этому классу систем можно отнести радиотехнические, оптические следящие системы, а также системы наведения и ориентации научных приборов. Эти системы объединяют общность выполняемых функций и принципов их построения.

В системах пространственного слежения в явном виде можно выделить три канала: канал дальности, канал угла места и канал азимута. Как правило, канал дальности является независимым и не влияет на работу каналов азимута и угла места. Каналы угла места и азимута взаимосвязаны между собой, и их влияние друг на друга определяется спецификой системы. Целью настоящего раздела является приложение результатов предыдущих разделов к решению задач анализа и синтеза систем пространственного слежения.

Рассмотрим типовую функциональную схему системы пространственного слежения, представленную на рисунке 5.1. Пеленгатор или пеленгационное устройство удерживает в поле зрения подвижный объект, отрабатывая с помощью приводов углов места и азимута рассогласование между направлением на объект и осью диаграммы направленности излучения (осью визирования). Относительное рассогласование между направлением на объект и осью визирования преобразуется пеленгатором в электрические сигналы, поступающие на регулятор, управляющий приводами поворота пеленгатора по углам места и азимута. Выходные сигналы общего тракта, как правило, зависят нелинейно от ошибок по углам места и азимута.

В приводах установлены измерители скоростей угловых перемещений (тахогенераторы), и информация о скорости используется для выработки управляющих воздействий в регуляторе, что отражено на рисунке 5.1 в виде обратных связей с приводов каналов углов места и азимута.

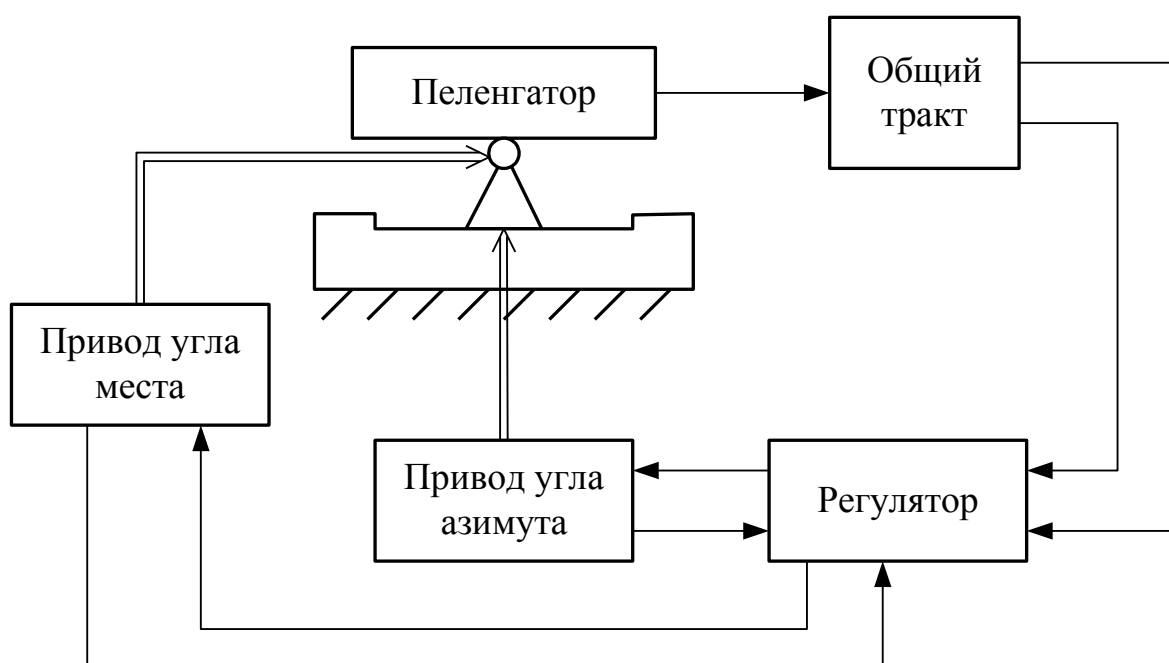


Рисунок 5.1 – Функциональная схема системы пространственного слежения

Для первоначального наведения пеленгатора на объект используется система целеуказаний, например, станция кругового обзора. При недостаточной априорной информации о положении цели организуется поиск объекта. Переход от режима поиска к режиму сопровождения объекта называют захватом цели. Основными требованиями, предъявляемыми к системам пространственного слежения, являются обеспечение надежного захвата и высокая точность слежения за объектом в режиме сопровождения. В данном разделе в основном остановимся на решении задачи захвата

и синтеза регуляторов, обеспечивающих требуемые динамические свойства с учетом специфики систем пространственного слежения.

В соответствии с функциональной схемой (рисунок 5.1) структуру систем пространственного слежения по каналам углов места и азимута можно представить в виде, изображенном на рисунке 5.2. На рисунке 5.2 применены следующие обозначения:  $y_1, y_2$  – регулируемые величины – угловые значения направления оси визирования по углам места и азимута соответственно;  $g_1, g_2$  – входные значения, определяющие значения углов места и азимута направления на подвижный объект;  $e_1, e_2$  – ошибки рассогласования;  $\xi_1, \xi_2$  – выходные сигналы с общего тракта, нелинейно связанные с ошибками рассогласования  $e_1$  и  $e_2$ ;  $u_1$  и  $u_2$  – управляющие воздействия каналов углов места и азимута, вырабатываемые регулятором, соответственно;  $y_{u1}, y_{u2}$  – измеряемые переменные, величины, пропорциональные скоростям изменения угловых положений  $y_1, y_2$ ; ЛЧ $i-1$  и ЛЧ $i-2$  ( $i=1,2$ ) – линейные части моделей описания приводов каналов углов места и азимута.

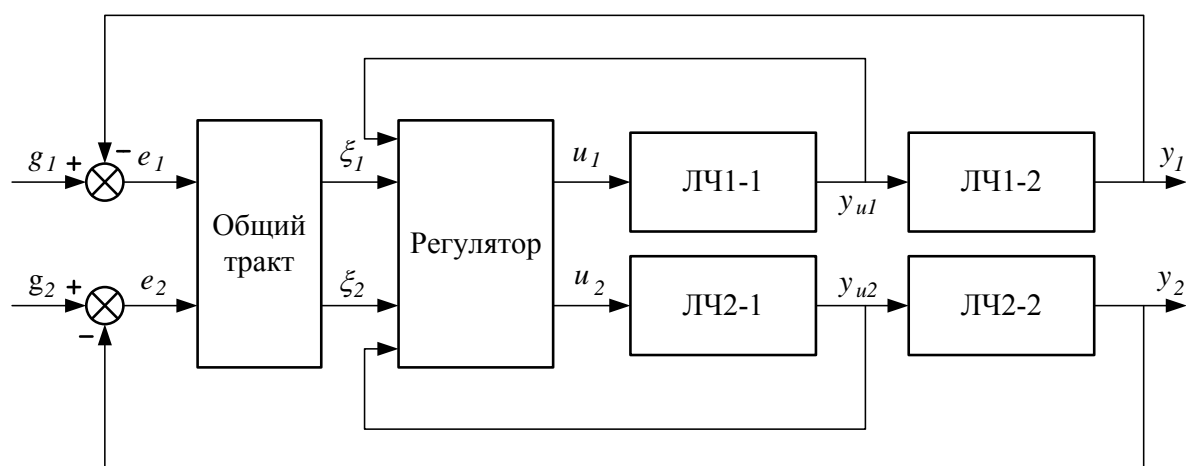


Рисунок 5.2 – Увеличенная структурная схема каналов углов места и азимута системы пространственного слежения

Детализируем модели общего тракта и линейных частей системы пространственного слежения, которые наиболее часто используются для анализа и синтеза подобного класса систем. Модель общего тракта представлена на рисунке 5.3.

Выходными переменными являются отклонения между угловыми значениями направлений на подвижный объект и осью визирования  $e_1$  и  $e_2$ , величина  $\theta$  есть норма вектора ошибки  $e = [e_1 \ e_2]^T$ , которая равна

$$\theta = \sqrt{(e_1)^2 + (e_2)^2} = \|e\|, \quad (5.1)$$

$\psi(\theta)$  – нелинейная зависимость, изображенная на рисунке 5.4, отражающая измерительные свойства пеленгатора и удовлетворяющая ограничениям

$$0 < \psi(\theta) \leq q_+ \cdot \theta, \\ \psi(0) = 0.$$

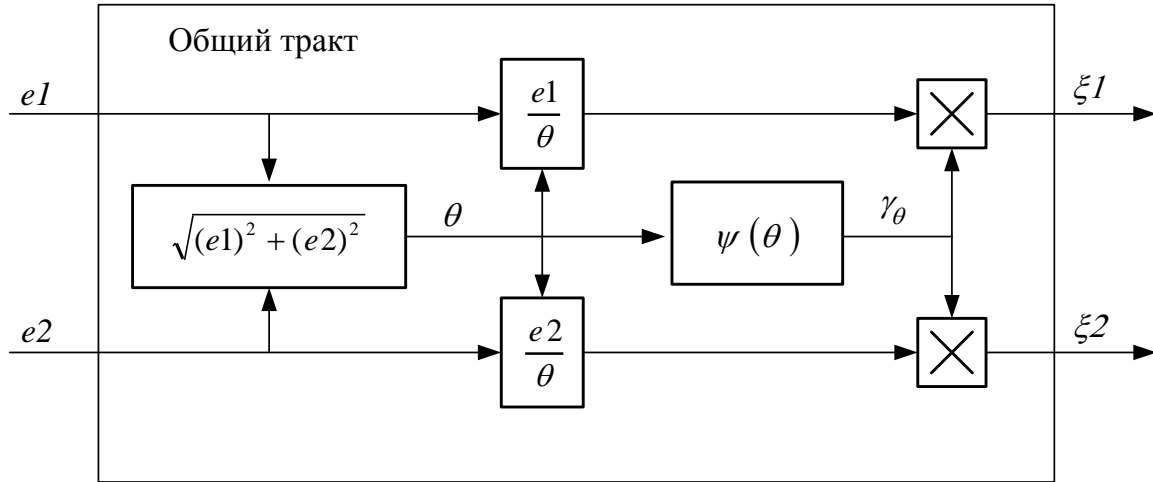


Рисунок 5.3 – Структурная схема общего тракта

На структурной схеме (рисунок 5.3) условно показано, что сигналы  $\xi1$  и  $\xi2$  после умножителей равны

$$\xi1 = \psi(\theta) \cdot \frac{e1}{\theta}, \\ \xi2 = \psi(\theta) \cdot \frac{e2}{\theta},$$

или если ввести вектор  $\xi = [\xi1 \ \xi2]^T$ , то

$$\xi = \psi(\theta) \cdot \frac{e}{\theta}.$$

Нелинейную зависимость  $\psi(\theta)$  (показанную на рисунке 5.4) называют пеленгационной характеристикой. Эта характеристика существенно нелинейная, но при решении задач анализа и синтеза обычно применяют ее аппроксимацию кусочно-линейными функциями, отрезком синусоиды или более сложными зависимостями. На рисунке 5.4 для примера изображены аппроксимации пеленгационной характеристики линейной зависимостью (штрих-пунктирная линия) в пределах  $\theta \in [0 \ d_n]$ , где  $d_n$  такое значение  $\theta$ , которое определяет поле зрения (апертуру) пеленгационного устройства, и линейной характеристикой с насыщением  $\theta \in [0 \ d_n]$  (пунктирная линия). Отметим, что нелинейная функция  $\psi(\theta)$  является функцией компонент вектора ошибки  $e1$  и  $e2$ , так как значение  $\theta$  есть норма вектора ошибки.

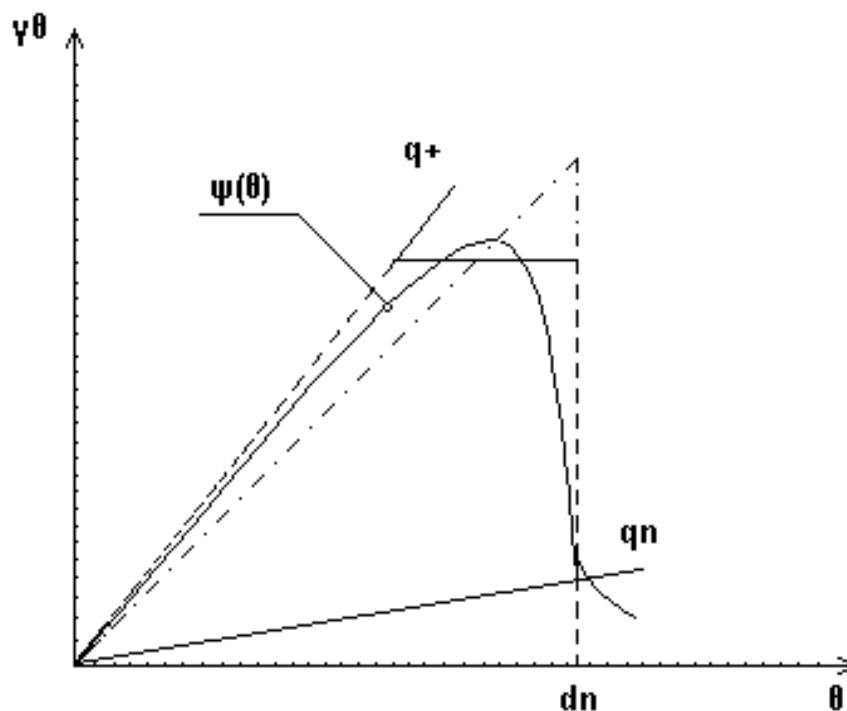


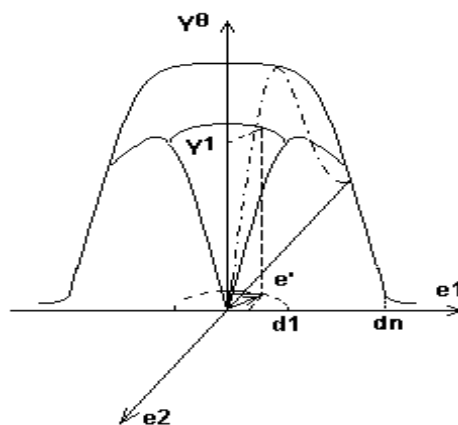
Рисунок 5.4 – Типовой вид нелинейности  $\psi(\theta)$  пеленгатора

Нелинейную функцию  $\psi(\theta)$  можно трактовать как зависимость от двух переменных  $e_1$  и  $e_2$ , а геометрическая интерпретация этой зависимости приведена на рисунке 5.5 а. При такой трактовке зависимость выходной переменной нелинейности  $\gamma_\theta$  от переменных  $e_1$  и  $e_2$  задается поверхностью, образованной вращением кривой  $\gamma_\theta = \psi(e_1)$  при  $e_2 = 0$  вокруг оси в пространстве  $(\gamma_\theta, e_1, e_2)$ . При этом всем векторам ошибок одной и той же длины  $\theta = \sqrt{(e_1')^2 + (e_2')^2} = d_1$  соответствует одно и то же значение выходной переменной  $\gamma_1$ . На рисунке 5.5 б) в плоскости ошибок  $e_1$  и  $e_2$  изображена поверхность постоянного уровня (окружность)  $\mathcal{G}^2 = d_1^2$ , определяющая задание множества векторов ошибок одинаковой длины  $d_1$ , которые неразличимы по значению выходной переменной  $\gamma_1$ . Поверхность постоянного уровня  $\mathcal{G}^2 = d_n^2$  ограничивает поле зрения – апертуру пеленгатора. Значение  $d_n$  зависит от уровня полезного сигнала на выходе пеленгатора на спаде пеленгационной характеристики. Заметим, что величина, определяемая соотношением (5.1) есть евклидова норма вектора ошибок, т. е.  $\theta = \|e\|$ , а поэтому  $\psi(\theta) = \psi(\|e\|)$ .

На рисунке 5.6 изображена типовая структура привода следящей радиолокационной станции по одному из каналов, состоящего из двигателя постоянного тока и редуктора. На структурной схеме приняты следующие

обозначения:  $x_{1i}$  – угол поворота ротора двигателя;  $x_{2i}$  – скорость изменения угла поворота ротора двигателя;  $i_i$  – коэффициент редукции;  $k_i$  – коэффициент передачи двигателя;  $T_i$  – постоянная времени двигателя постоянного тока. В рассматриваемом приводе к ЛЧ1–1 относится модель описания двигателя постоянного тока относительно скорости вращения ротора двигателя  $x_{2i}$ . К ЛЧ1–2 относится модель, описывающая связь угловых положений пеленгатора (антенны)  $y_i$  со скоростью вращения ротора двигателя  $x_{2i}$ . Скорость вращения ротора двигателя измеряется посредством тахогенератора с коэффициентом передачи  $k_{mzi}$  и  $y_{ni}$  – переменная (напряжение) пропорциональная скорости вращения  $x_{2i}$ . Совместное описание общего тракта и линейных частей определяет модель объекта управления.

а)



б)

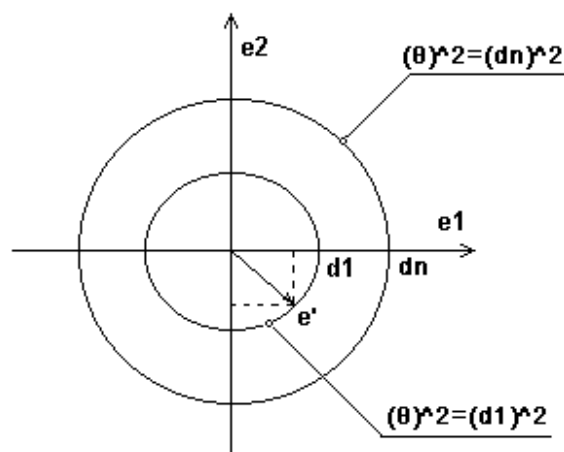


Рисунок 5.5 – Геометрическая интерпретация нелинейности общего тракта: а) в пространстве ошибок и выходной переменной; б) в пространстве ошибок

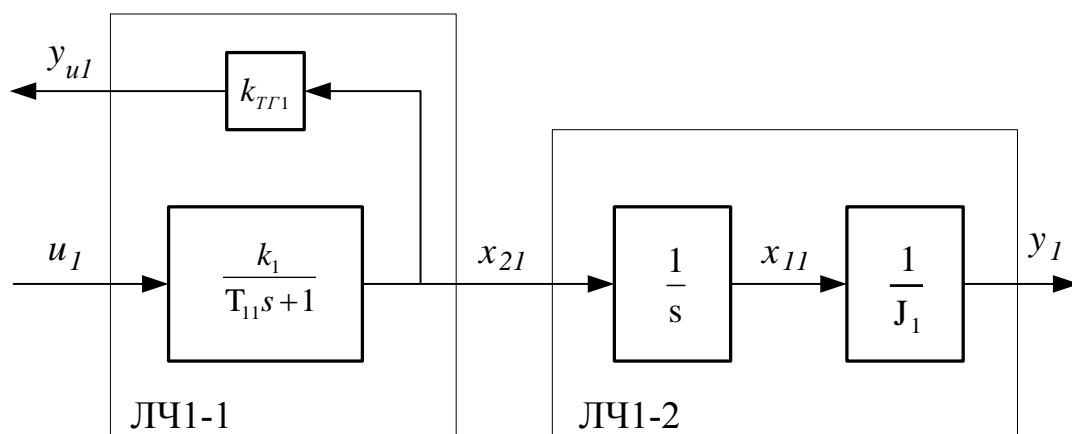


Рисунок 5.6 – Структурная схема привода радиолокационной станции

В системах пространственного слежения переход от режима поиска к режиму сопровождения объекта наблюдения называют захватом цели. Под режимом захвата будем понимать состояние системы от момента попадания объекта наблюдения в поле зрения системы (в пределы апертуры пеленгационной характеристики) до момента, начиная с которого система пространственного слежения сопровождает цель с требуемой точностью. В режиме сопровождения целью функционирования систем является поддержание малых рассогласований при слежении за объектом наблюдения.

Анализ режима захвата состоит в определении условий захвата – области начальных отклонений, из которой все траектории системы стягиваются к устойчивому положению равновесия. Режим захвата может дополнительно характеризоваться временем перехода от режима поиска к режиму сопровождения. В этом параграфе остановимся на вопросе определения условий захвата для систем пространственного слежения.

## 5.2 Синтез линейных регуляторов для системы пространственного слежения

В данном подразделе рассмотрим вопросы синтеза и анализа систем с непрерывными и дискретными П и ПИ регуляторами, синтезированными при помощи методов модального и оптимального управлений (решение уравнений Сильвестра и модифицированного уравнения Риккати соответственно). Задача синтеза П (ПИ) регулятора состоит в нахождении матриц линейных стационарных обратных связей для каждого из каналов управления.

Пример. Синтез непрерывного П регулятора методом модального управления.

Исходными данными для синтеза регулятора является матричное описание ОУ. Предположим, что по одному из каналов ОУ задан следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \quad 0].$$

Пусть также заданы показатели качества системы управления – время переходного процесса  $t_n = 0,1$ с и перерегулирование  $\sigma = 0\%$ . Тогда характеристическая частота будет равна  $\omega_0 = \frac{t_n'}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$  рад/с, а матрицы эталонной модели  $G = \begin{bmatrix} -50 & 1 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}, H = [1 \quad 0]$ .

Применяя алгоритм синтеза непрерывного регулятора методом модального управления, получаем матрицу линейных обратных связей  $K = [378.65 \quad 10.211]$ . Итоговая схема моделирования одного канала замкнутой системы управления показана на рисунке 5.7.

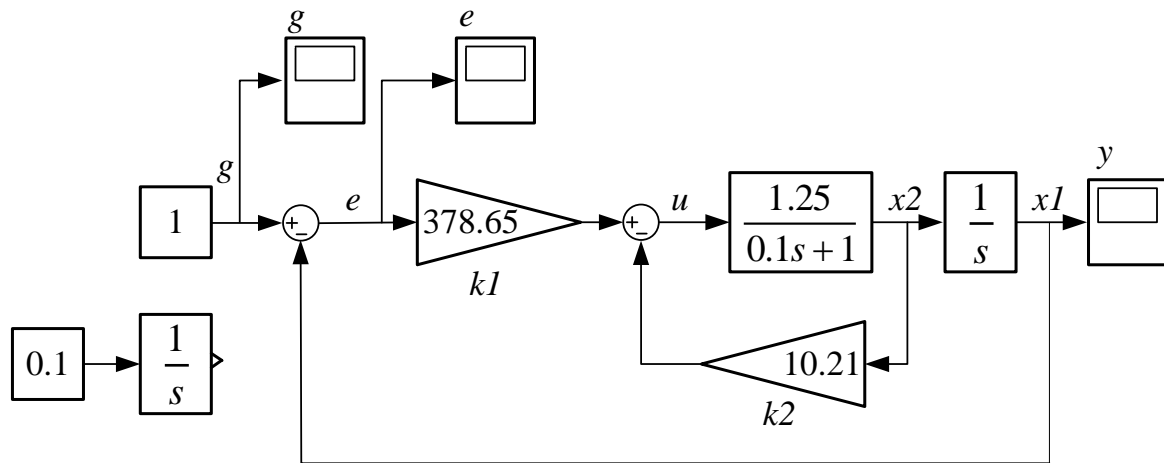


Рисунок 5.7 – Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с непрерывным П регулятором, рассчитанным методом модального управления

Пример. Синтез дискретного П регулятора методом модального управления.

Исходными данными для синтеза регулятора одного канала системы пространственного слежения является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \quad 0].$$

Заданы показатели качества системы управления – время переходного процесса  $t_n = 0,1$ с и перерегулирование  $\sigma = 0\%$ . Пусть период квантования времени дискретного регулятора выбран равным  $T=0,003$ с. Тогда ха-

характеристическая частота  $\omega_0 = \frac{\dot{t}_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$  рад/с, а матрицы эталонной модели равны  $G = \begin{bmatrix} 0.861 & 1 \\ 0 & 0.861 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0]$ .

Применяя алгоритм синтеза дискретных регуляторов методом модального управления, получаем матрицу линейных обратных связей  $K = [227.81 \ 7.6107]$ . Итоговая схема моделирования одного канала замкнутой системы управления показана на рисунке 5.8.

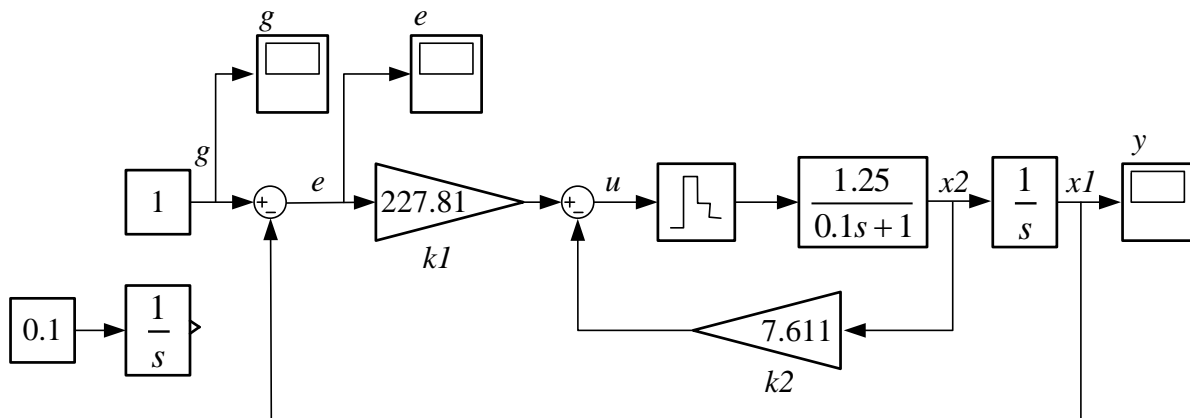


Рисунок 5.8 – Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с дискретным П регулятором, рассчитанным методом модального управления

Пример. Синтез непрерывного П регулятора методом оптимального управления.

Исходными данными для синтеза регулятора одного канала системы пространственного слежения является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0]$$

Заданы показатели качества системы управления – время переходного процесса  $t_n = 0,1$  с и перерегулирование  $\sigma = 0\%$ . Тогда характеристическая

частота  $\omega_0 = \frac{\dot{t}_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$  рад/с. Кроме того заданы показатели качественной устойчивости  $\beta + r = -\omega_0, r \approx 1$  рад/с., тогда  $\beta = -51$  рад/с.

Назначим матрицы штрафов по состоянию  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  и управлению  $R = 1$ . Применяя алгоритм синтеза регуляторов методом оптимального

управления, получаем матрицу линейных обратных связей  $K = [378.12 \quad 10.2]$ . Итоговая схема моделирования одного канала замкнутой системы управления показана на рисунке 5.9.

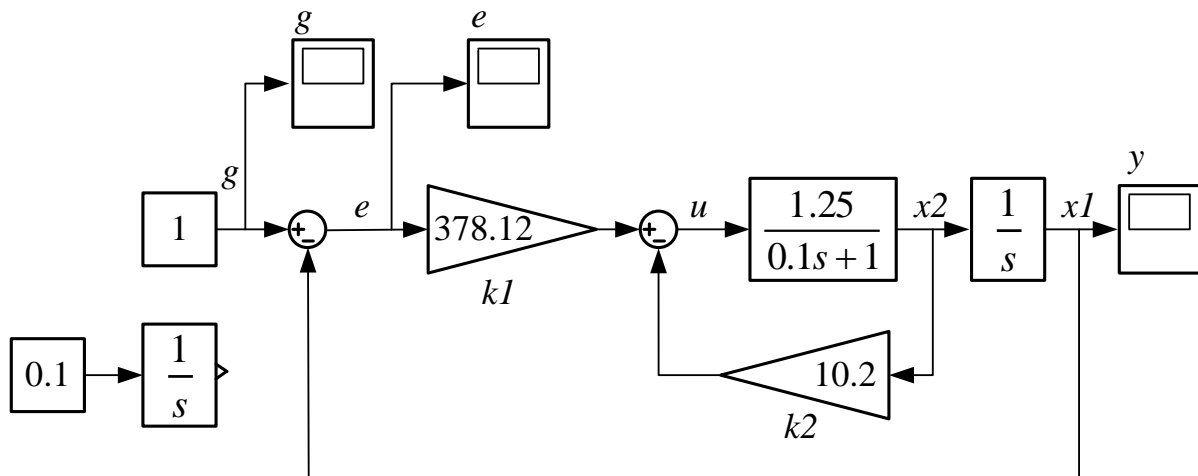


Рисунок 5.9 – Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с непрерывным П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

Пример. Синтез дискретного П регулятора методом оптимального управления.

Исходными данными для синтеза регулятора одного канала системы пространственного слежения является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \quad 0],$$

Заданы показатели качества системы управления – время переходного процесса  $t_n = 0,1$ с и перерегулирование  $\sigma = 0\%$ . Тогда характеристическая

частота  $\omega_0 = \frac{t_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$  рад/с. Предположим, что период квантования времени выбран равным  $T = 0,003$ с. Кроме того, заданы показатели качественной устойчивости  $\beta + r = -\omega_0, r \approx 1$ , тогда  $\beta = -51$ . Назначим

матрицы штрафов по состоянию  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  и управлению  $R = 1$ . Применяя алгоритм синтеза дискретных регуляторов методом оптимального

управления, получаем матрицу линейных обратных связей  $K = [197.11 \quad 6.906]$ . Итоговая схема моделирования одного канала замкнутой системы управления показана на рисунке 5.10.

Пример. Синтез непрерывного ПИ регулятора методом модального управления.

Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0 \ 0].$$

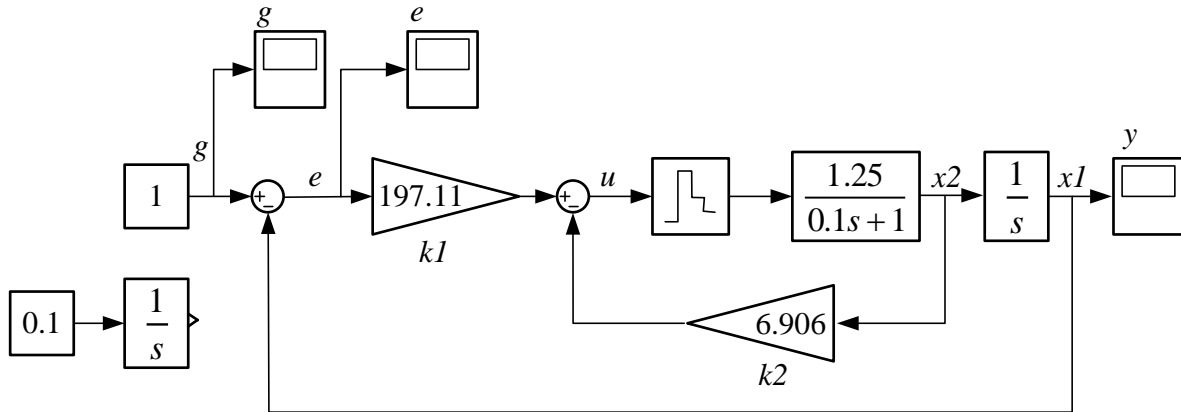


Рисунок 5.10 – Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с дискретным П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления

Заданы показатели качества системы управления – время переходного процесса  $t_n = 0,1\text{с}$  и перерегулирование  $\sigma = 0\%$ . Тогда характеристическая частота  $\omega_0 = \frac{t'_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$  рад/с, и матрицы эталонной модели бу-

дут равны  $G = \begin{bmatrix} -50 & 1 & 0 \\ 0 & -50 & 1 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0 \ 0].$

Применяя алгоритм синтеза непрерывного ПИ регулятора методом модального управления, получаем матрицу линейных обратных связей  $K = [-144087 \ -3553.5 \ 29.406]$ . Итоговая схема моделирования одного канала замкнутой системы управления показана на рисунке 5.11.

Пример. Синтез дискретного ПИ регулятора системы пространственного слежения методом модального управления.

Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0 \ 0].$$

Заданы показатели качества системы управления – время переходного процесса  $t_n = 0,1$  с и перерегулирование  $\sigma = 0\%$ . Выберем период квантования времени  $T = 0,003$  с. Тогда характеристическая частота  $\omega_0 = \frac{t_n'}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$  рад/с, и матрицы эталонной модели будут равны

$$G = \begin{bmatrix} 0.861 & 1 & 0 \\ 0 & 0.861 & 1 \\ 0 & 0 & 0.861 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0 \ 0].$$

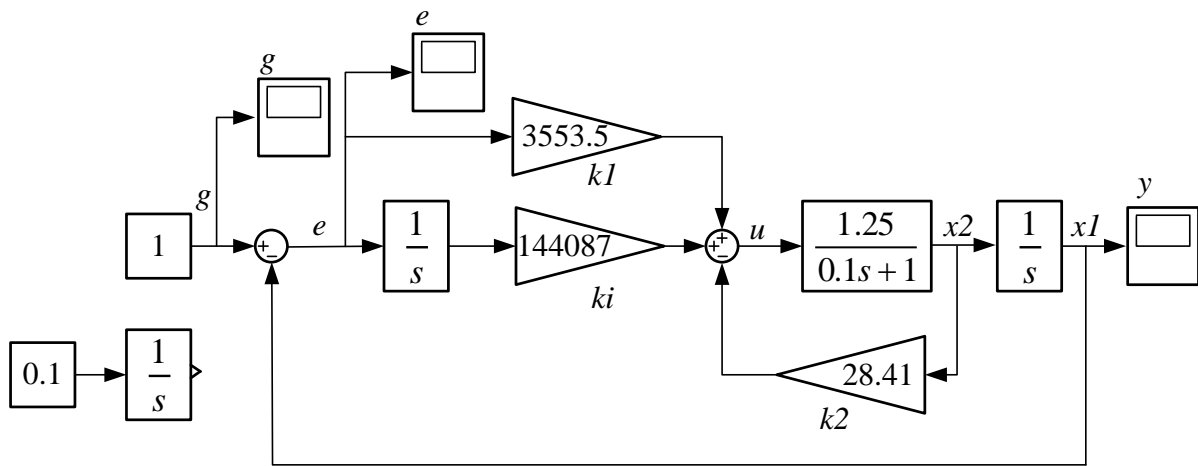


Рисунок 5.11 – Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с непрерывным ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления

Применяя алгоритм синтеза дискретного ПИ регулятора методом модального управления, получаем матрицу линейных обратных связей  $K = [-115.76 \ 1439.9 \ 16.255]$ . Итоговая схема моделирования одного канала замкнутой системы управления показана на рисунке 5.12.

Пример. Синтез непрерывного ПИ регулятора системы пространственного слежения методом оптимального управления.

Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0 \ 0]$$

Заданы показатели качества системы управления – время переходного процесса  $t_n = 0,1$  с и перерегулирование  $\sigma = 0\%$ . Тогда характеристическая

частота  $\omega_0 = \frac{t'_n}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$  рад/с. Кроме того, заданы показатели качественной устойчивости  $\beta + r = -\omega_0, r \approx 1, \beta = -51$ . Назначим матрицы штрафов по состоянию  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  и управлению  $R = 1$ .

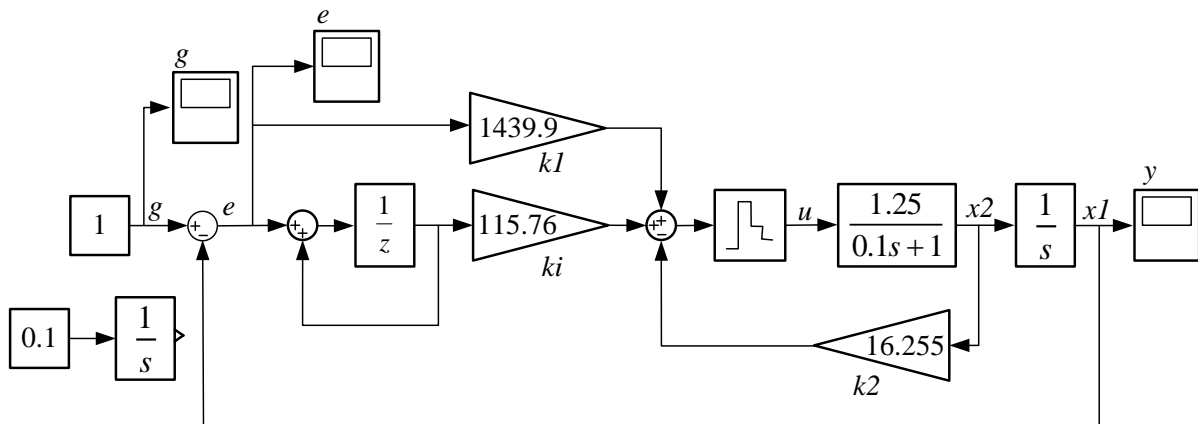


Рисунок 5.12 – Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с дискретным ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления

Применяя алгоритм синтеза непрерывного ПИ регулятора методом оптимального управления, получаем матрицу линейных обратных связей  $K = [-118186 \ 3131.1 \ 26.534]$ . Итоговая схема моделирования одного канала замкнутой системы управления показана на рисунке 5.13.

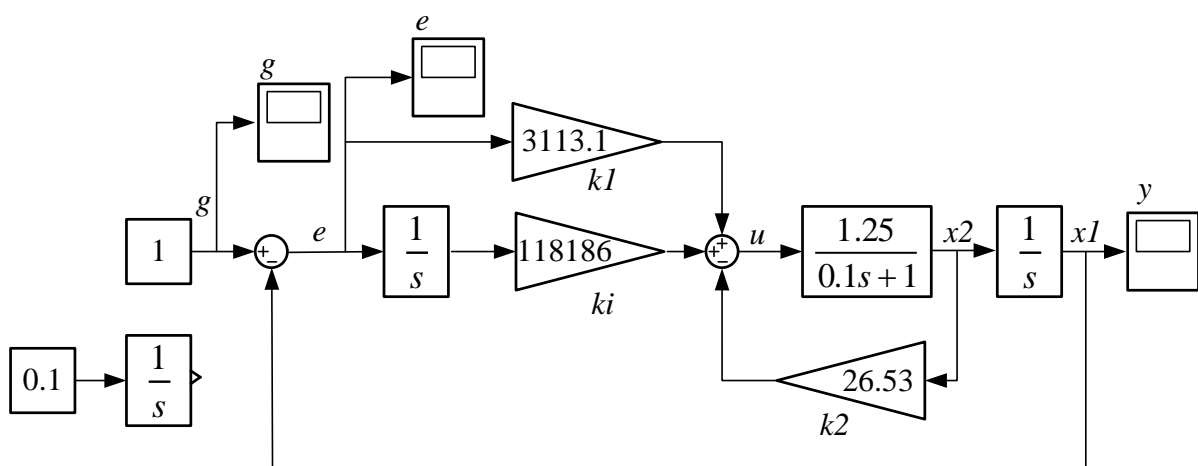


Рисунок 5.13 – Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с непрерывным ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления

Пример. Синтез дискретного ПИ регулятора системы пространственного слежения методом оптимального управления.

Исходными данными для синтеза регулятора является описание ОУ следующими матрицами:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}, C_n = [1 \ 0 \ 0],$$

и заданные показатели качества  $t_n = 0,1с, \sigma = 0\%$ . Период квантования  $T = 0,003с$ . Тогда характеристическая частота  $\omega_0 = \frac{t_n'}{t_n} = \frac{4,8}{0,1} = 48 \approx 50$  рад/с.

Кроме того, заданы показатели качественной устойчивости  $\beta + r = e^{-\omega_0 T}, r \approx 0,1, \beta = 0.761$ .

Назначим матрицы штрафов по состоянию  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  и управле-

нию  $R = 1$ . Применяя алгоритм синтеза дискретного ПИ регулятора методом оптимального управления, получаем матрицу линейных обратных связей  $K = [-87.867 \ 1005.2 \ 13.598]$ . Итоговая схема моделирования одного канала замкнутой системы управления показана на рисунке 5.14.

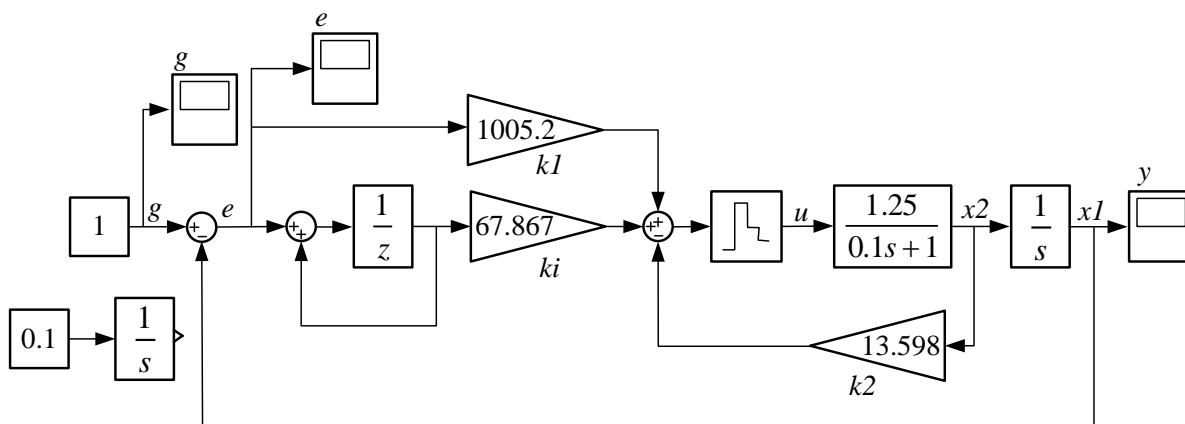


Рисунок 5.14 – Схема моделирования одного канала системы пространственного слежения с дискретным ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления

На рисунке 5.15 показаны графики переходных процессов и ошибок отработки входного ступенчатого воздействия для синтезированных систем с П регулятором. Показаны:  $y_1(t)$  – переходный процесс для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $y_2(t)$  – переходный процесс для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $y_3(t)$  – переходный процесс для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом опти-

мального управления;  $y_4(t)$  – переходный процесс для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $g(t)$  – единичное ступенчатое воздействие;  $e_1(t)$  – ошибка для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $e_2(t)$  – ошибка для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $e_3(t)$  – ошибка для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $e_4(t)$  – ошибка для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

На рисунке 5.16 показаны графики переходных процессов и ошибок отработки входного линейно возрастающего воздействия для синтезированных систем с П регулятором. Показаны:  $y_1(t)$  – переходный процесс для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $y_2(t)$  – переходный процесс для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $y_3(t)$  – переходный процесс для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $y_4(t)$  – переходный процесс для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $g(t)$  – линейно нарастающее воздействие;  $e_1(t)$  – ошибка для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $e_2(t)$  – ошибка для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $e_3(t)$  – ошибка для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $e_4(t)$  – ошибка для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

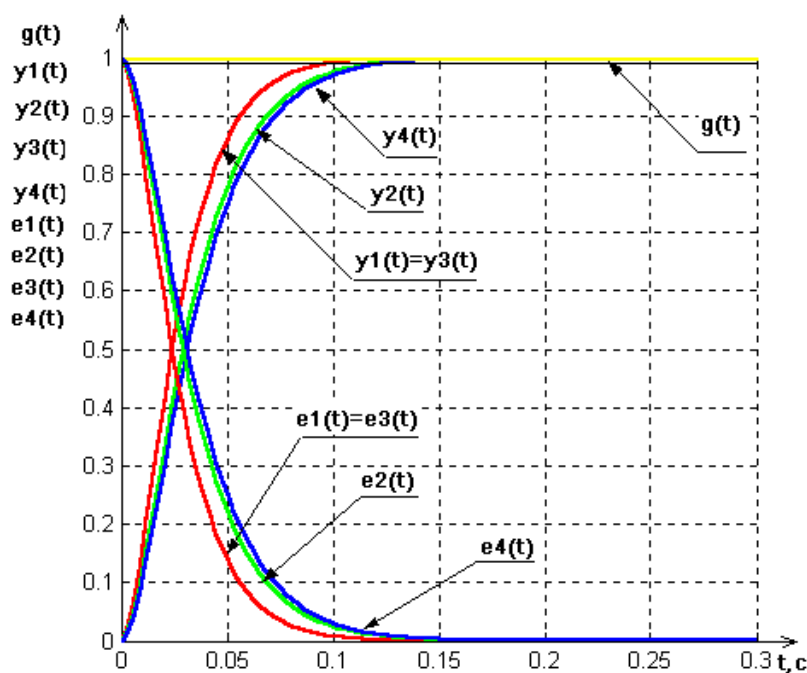


Рисунок 5.15 – Графики переходных процессов, задающего воздействия  $g = 1(t)$  и ошибок слежения  $e(t)$

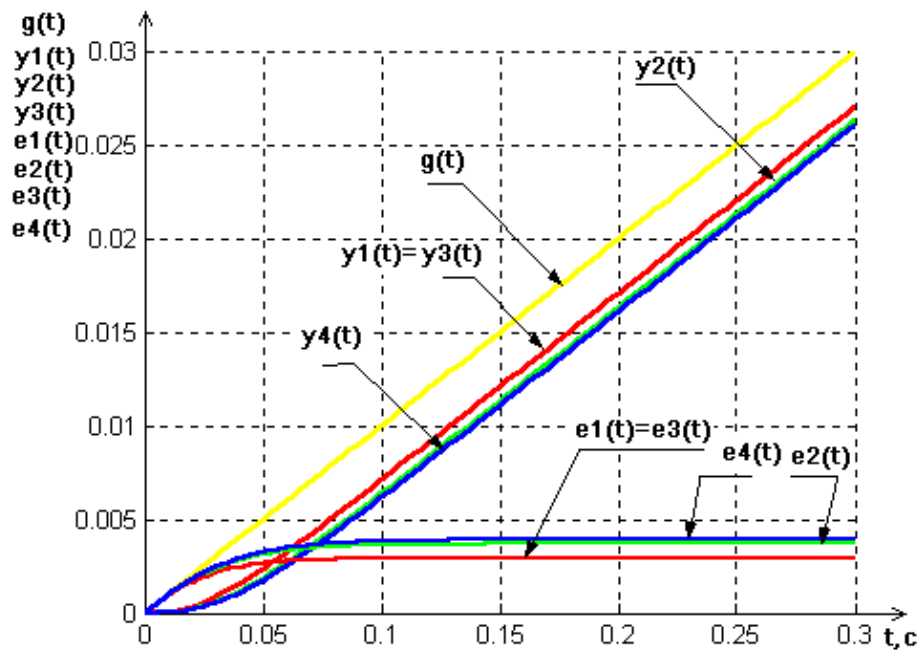


Рисунок 5.16 – Графики переходных процессов, задающего воздействия  $g(t) = 0.1 \cdot t$  и ошибок слежения  $e(t)$

На рисунке 5.17 показаны графики переходных процессов и ошибок отработки входного ступенчатого воздействия для синтезированных систем с ПИ регулятором. Показаны:  $y_1(t)$  – переходный процесс для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $y_2(t)$  – переходный процесс для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $y_3(t)$  – переходный процесс для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $y_4(t)$  – переходный процесс для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $g(t)$  – единичное ступенчатое воздействие;  $e_1(t)$  – ошибка для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $e_2(t)$  – ошибка для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $e_3(t)$  – ошибка для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $e_4(t)$  – ошибка для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

На рисунке 5.18 показаны графики переходных процессов и ошибок отработки входного линейно возрастающего воздействия для синтезированных систем с ПИ регулятором. Показаны:  $y_1(t)$  – переходный процесс для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $y_2(t)$  – переходный процесс для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $y_3(t)$  – переходный процесс для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $y_4(t)$  – переходный процесс для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом опти-

мального управления;  $g(t)$  – линейно-нарастающее воздействие;  $e_1(t)$  – ошибка для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $e_2(t)$  – ошибка для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления;  $e_3(t)$  – ошибка для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления;  $e_4(t)$  – ошибка для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом оптимального управления.

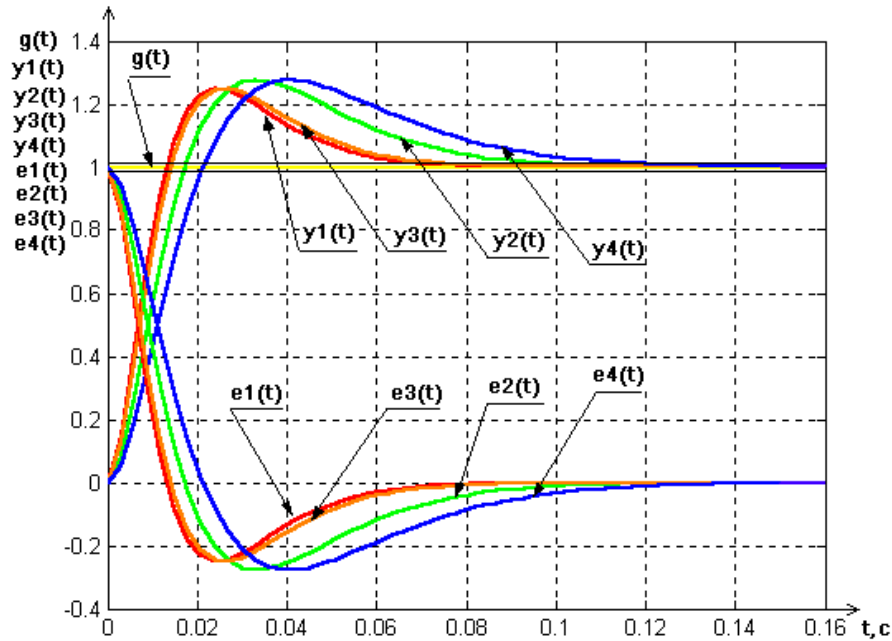


Рисунок 5.17 – Графики переходных процессов, задающего воздействия  $g = 1(t)$  и ошибок слежения  $e(t)$

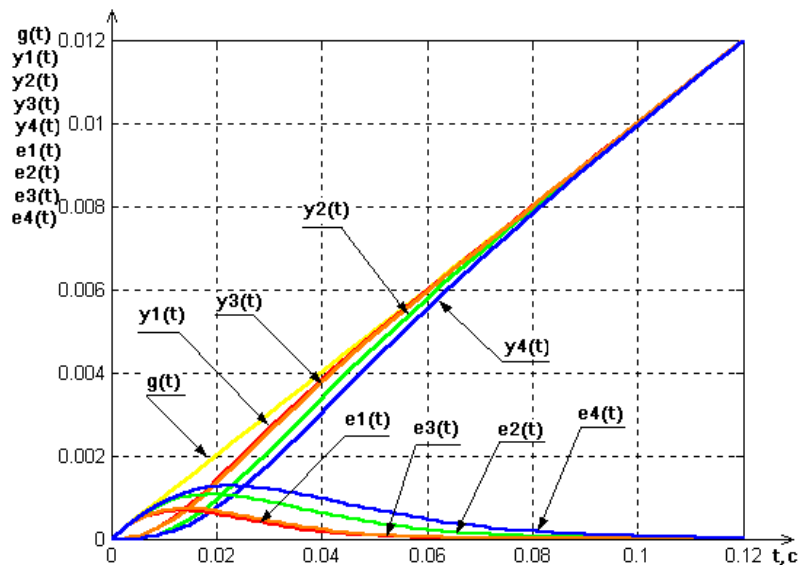


Рисунок 5.18 – Графики переходных процессов, задающего воздействия  $g(t) = 0.1 \cdot t$  и ошибок слежения  $e(t)$

Результаты моделирования показывают, что непрерывные регуляторы превосходят дискретные по динамическим свойствам, так как в них отсутствует квантование сигнала. Лучшими динамическими показателями из непрерывных систем обладает система с П регулятором, рассчитанным методом модального управления, так как он обладает лучшими показателями качества по сравнению с другими регуляторами ( $t_n = 0.07c, \sigma = 0\%$ ). Из дискретных систем лучшими динамическими показателями обладает система с П регулятором, ее показатели следующие:  $t_n = 0.085c, \sigma = 0\%$ .

### 5.3 Исследование режимов захвата и автосопровождения системы пространственного слежения

В данном подразделе рассмотрены режимы работы системы пространственного слежения – захват и автосопровождение. Для каждой системы (дискретной) определяются диапазоны входных постоянных воздействий, при которых выполняется захват цели, и линейно нарастающих, при которых работает слежение или автосопровождение. Также найдены предельные параметры этих воздействий, при которых происходит срыв процесса слежения за целью. Дополнительно выполнена оценка применения тех или иных регуляторов в зависимости от динамики поведения системы.

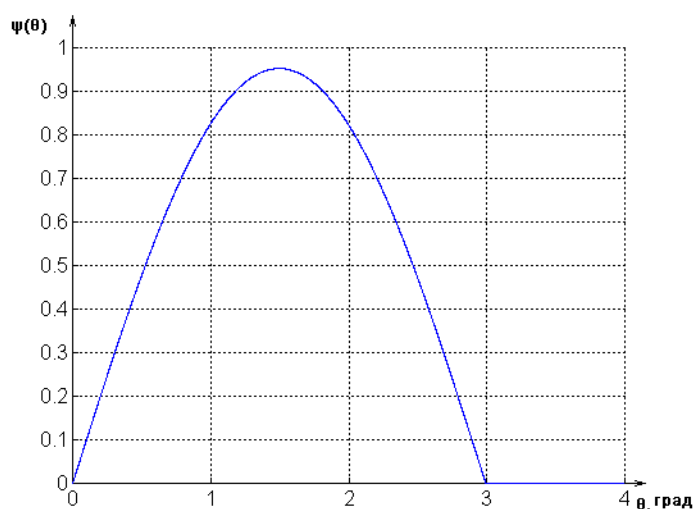


Рисунок 5.19 – Аппроксимация пеленгационной характеристики

Аппроксимируем нелинейность в общем тракте (см. рисунок 5.3) соотношением  $\psi(\theta) = a \cdot \sin(b \cdot \theta)$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные параметры. На рисунке 5.19 показан график нелинейности  $\psi(\theta)$ . Первый параметр выбирается из условия, что тангенс угла наклона касательной, проведенной к нелинейности в начале координат, равен 1, т.е.  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ . Второй – из условия, что полупериод нелинейности  $\theta = 3^\circ$ . Таким образом, получаем нелинейность следующего вида:  $\psi(\theta) = 0.785 \cdot \sin(0.105 \cdot \theta)$ .

Будем использовать непрерывный П регулятор, параметры которого определены на рисунке 5.9. Схема моделирования итоговой системы показана на рисунке 5.20.

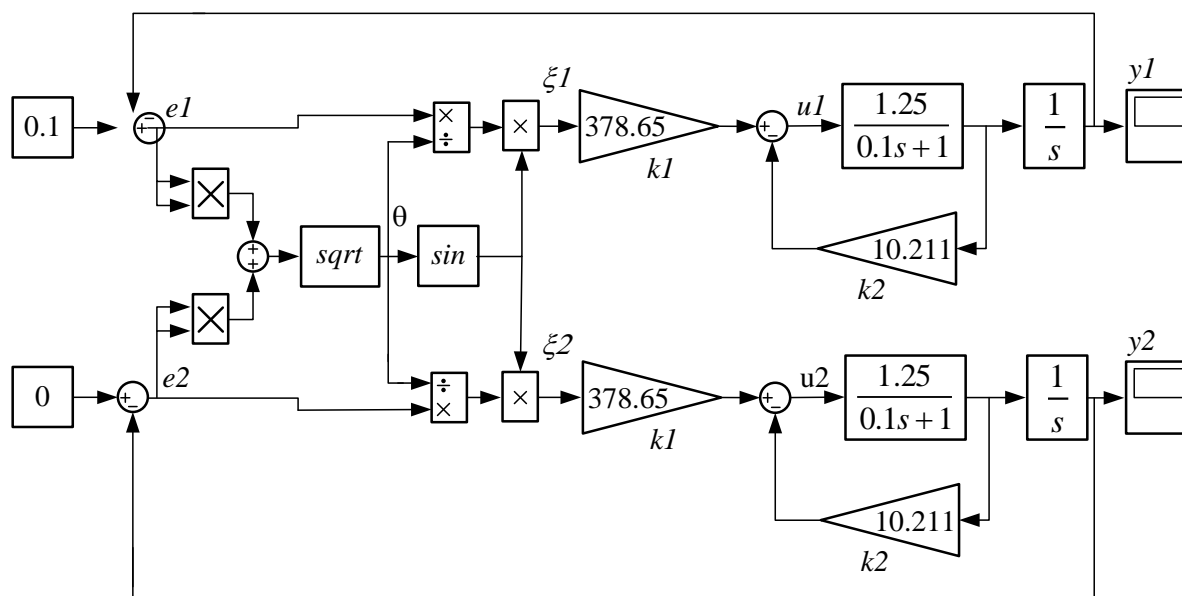


Рисунок 5.20 – Схема моделирования системы пространственного слежения с непрерывным П регулятором

На рисунке 5.21 можно видеть, что при различных значениях постоянных сигналов система ведет себя по-разному. При  $g(t) = 2.8(t)$  происходит затягивание переходного процесса в сравнении с переходным процессом при  $g(t) = 2.5(t)$ . Это обусловлено различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристике. При  $g(t) = 3(t)$  и больше система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения.

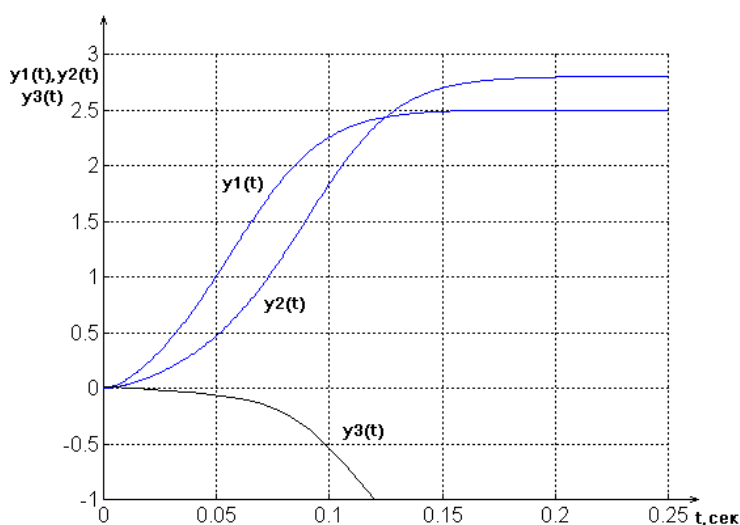


Рисунок 5.21 – Графики переходных процессов при различных значениях постоянного воздействия  $g(t)$

На рисунке 5.22 можно видеть, что при различных значениях линейно нарастающего сигнала система ведет себя по-разному. При  $g(t) \leq 32.7 \cdot t$  происходит слежение за целью. Это обусловлено различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристике. При  $g(t) \geq 32.8 \cdot t$  система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения.

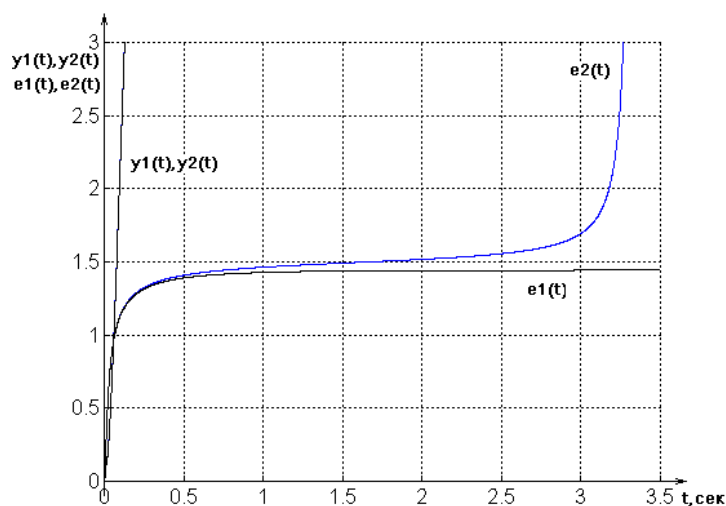


Рисунок 5.22 – Графики переходных процессов и ошибок слежения  $e(t)$  при граничных значениях линейно-нарастающего воздействия  $g(t)$

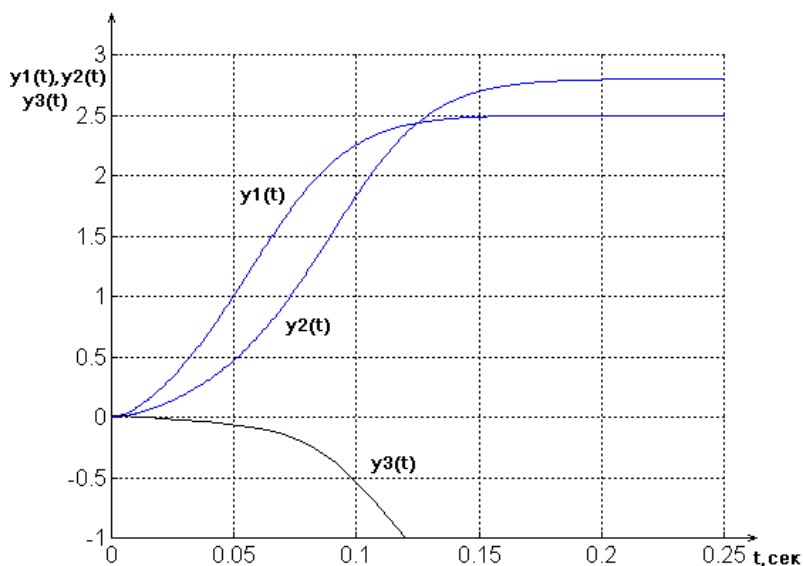


Рисунок 5.23 – Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия  $g(t)$

Данные результаты (см. рисунки 5.21, 5.22) получены для непрерывной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления. Для оптимального же управления схема моделирования аналогична схеме, представленной на рисунке 5.20, с учетом того, что во втором случае

матрица ЛСОС  $K = [378.12 \quad 10.2]$ . Результаты моделирования системы показаны на рисунках 5.23 и 5.24. При  $g(t) \geq 32.77 \cdot t$  система не может осуществить захват цели и происходит срыв слежения.

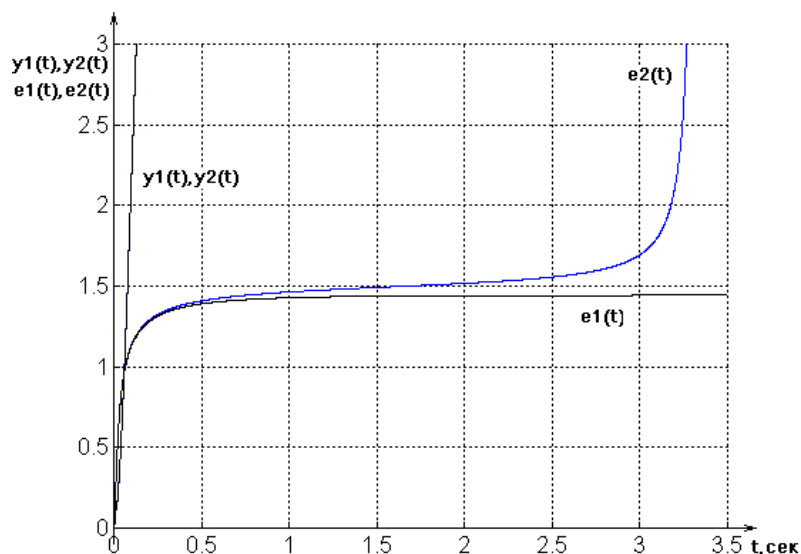


Рисунок 5.24 – Графики переходных процессов и ошибок слежения  $e(t)$  при граничных значениях линейно-нарастающего воздействия  $g(t)$

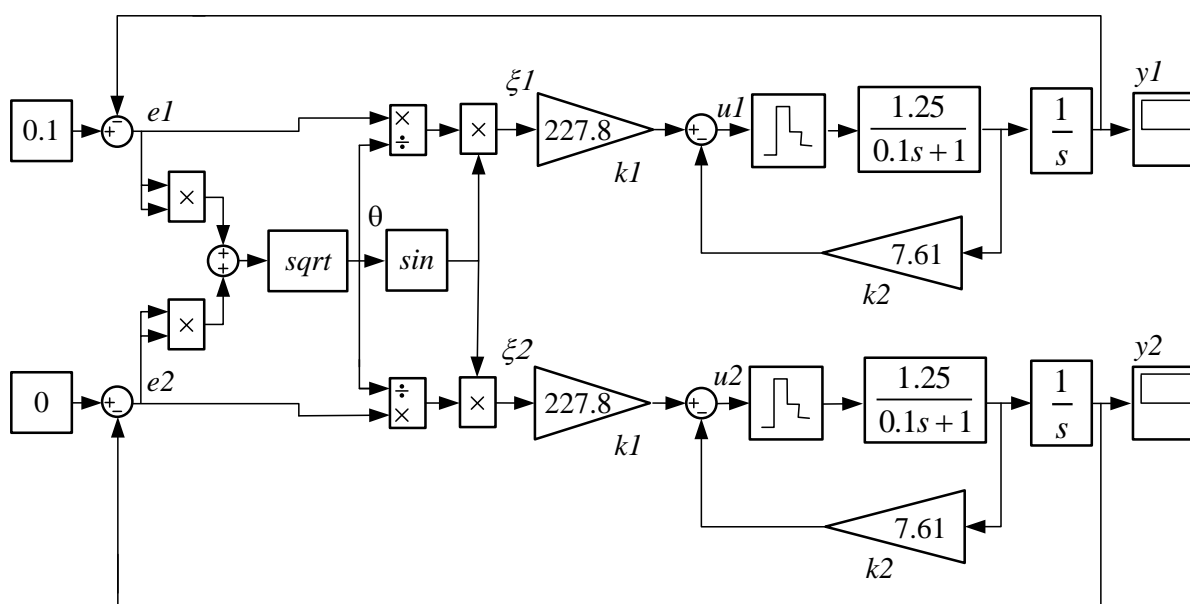


Рисунок 5.25 – Схема моделирования системы пространственного слежения с дискретным П регулятором

На рисунке 5.25 показана схема моделирования системы пространственного слежения с дискретным П регулятором. Параметры системы синтезированы в разделе 5.2. Графики переходных процессов показаны на рисунках 5.26 и 5.27. На рисунке 5.26 можно видеть, что при различных значениях постоянных сигналов система ведет себя по-разному. При

$g(t) = 2.8(t)$  происходит затягивание переходного процесса в сравнении с переходным процессом при  $g(t) = 2.5(t)$ . Это обусловлено различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристике. При  $g(t) = 3(t)$  и больше система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения.

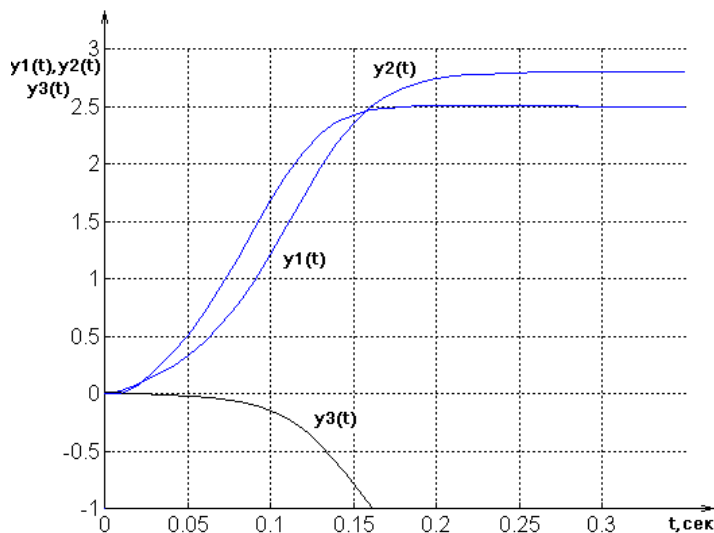


Рисунок 5.26 – Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия  $g(t)$

На рисунке 5.27 можно видеть, что при различных значениях линейно нарастающего сигнала система ведет себя по-разному. При  $g(t) \leq 25.7 \cdot t$  происходит слежение за целью. Это обусловлено различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристике. При  $g(t) \geq 25.9 \cdot t$  система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения.

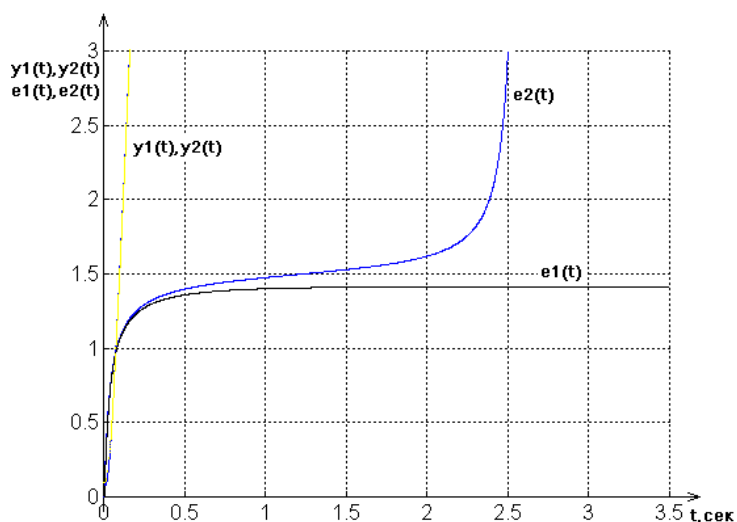


Рисунок 5.27 – Графики переходных и ошибок слежения  $e(t)$  процессов при граничных значениях линейно-нарастающего воздействия  $g(t)$

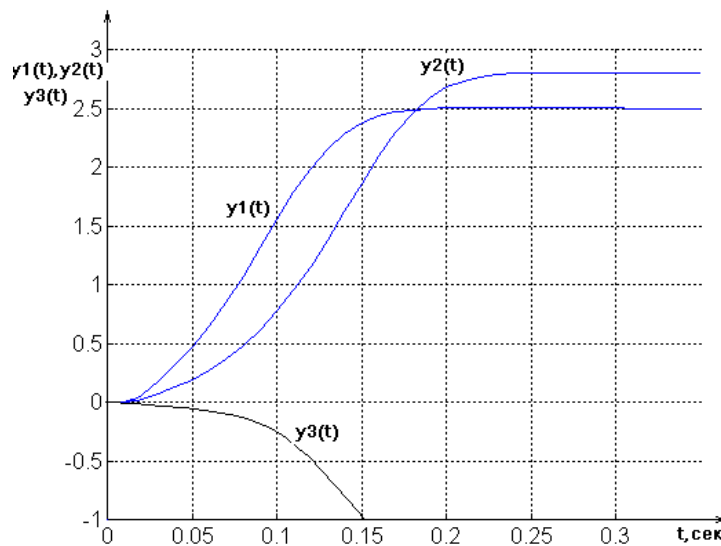


Рисунок 5.28 – Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия  $g(t)$

Данные результаты (см. рисунок 5.26, 5.27) получены для дискретной системы с П регулятором, рассчитанным методом модального управления. Для оптимального же управления схема моделирования аналогична схеме, представленной на рисунке 5.25, с учетом того, что во втором случае матрица ЛСОС  $K = [197.11 \quad 6.906]$ . Результаты моделирования системы показаны на рисунках 5.28 и 5.29. При  $g(t) \geq 24.5 \cdot t$  система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения.

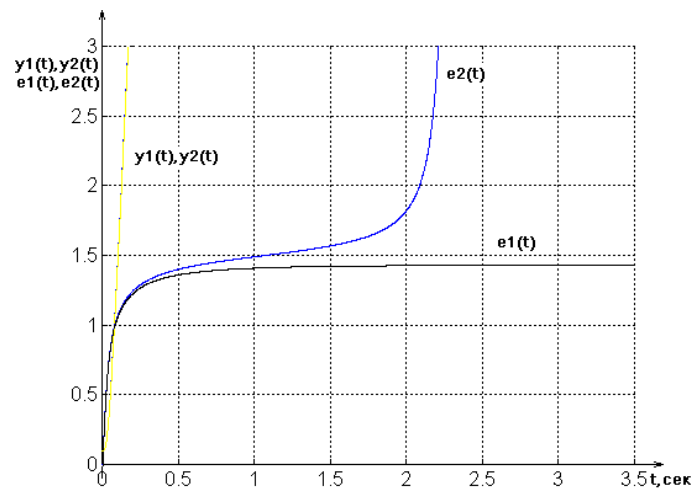


Рисунок 5.29 – Графики переходных процессов и ошибок слежения  $e(t)$  при граничных значениях линейно-нарастающего воздействия  $g(t)$

На рисунке 5.30 показана схема моделирования системы пространственного слежения с непрерывным ПИ регулятором. Параметры системы также синтезированы в разделе 5.2. На рисунке 5.31 можно видеть, что при различных значениях постоянных сигналов система ведет себя по-

разному. При воздействии  $g(t) = 2.8(t)$  происходит затягивание переходного процесса в сравнении с переходным процессом при  $g(t) = 2.5(t)$ . Это обусловлено различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристике. При постоянном воздействии  $g(t) = 2.99(t)$  и больше система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения.

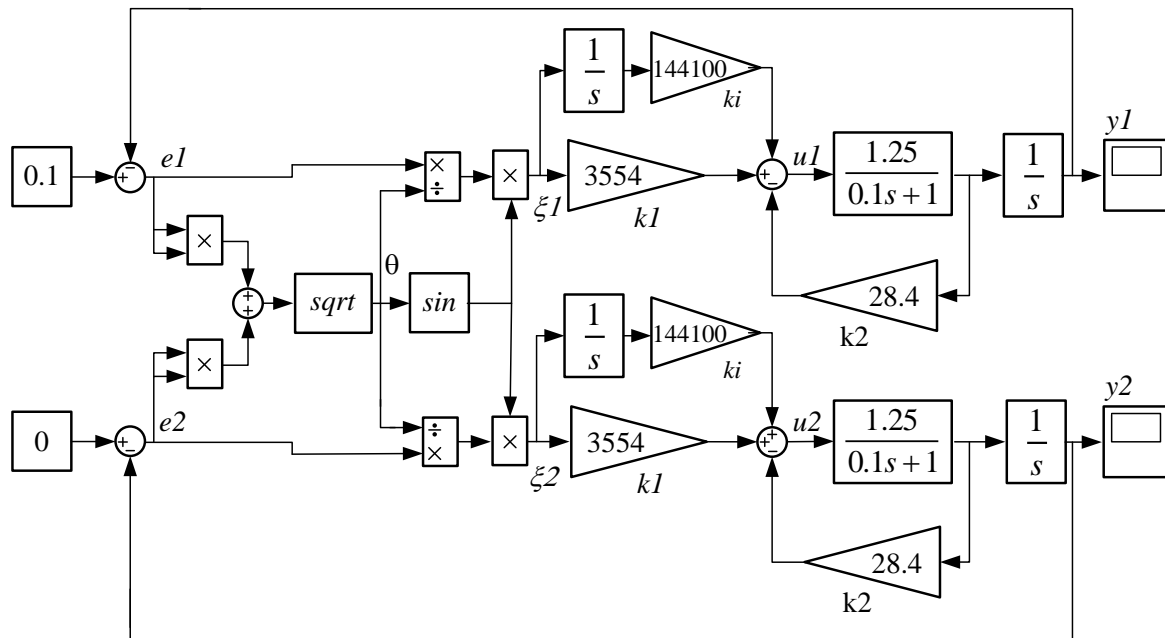


Рисунок 5.30 – Схема моделирования системы пространственного слежения с непрерывным ПИ регулятором

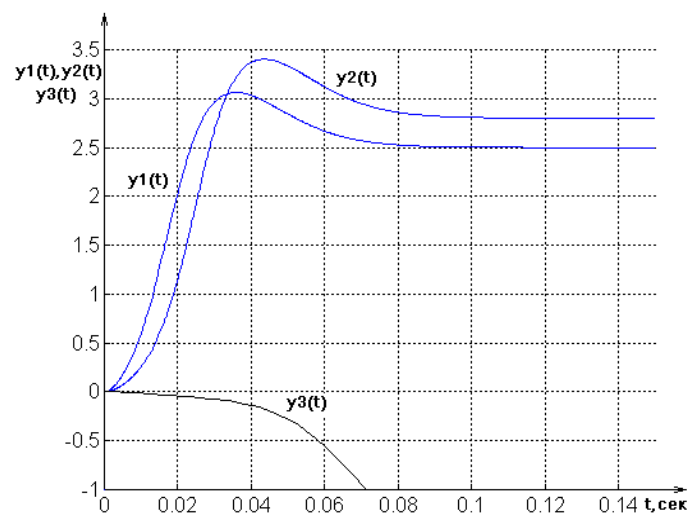


Рисунок 5.31 – Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия  $g(t)$

На рисунке 5.32 можно видеть, что при различных значениях линейно-нарастающего сигнала система ведет себя по-разному. При линейном возрастающем воздействии  $g(t) \leq 207.7 \cdot t$  происходит слежение за целью. При  $g(t) \geq 207.8 \cdot t$  система не может осуществить захват цели, и происхо-

дит срыв слежения. Данные результаты (см. рисунки 5.31, 5.32) получены для непрерывной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления. Для оптимального же управления схема моделирования аналогична схеме, представленной на рисунке 5.30, с учетом того, что во втором случае матрица ЛСОС  $K = [-118186 \quad 3113.1 \quad 26.534]$ .

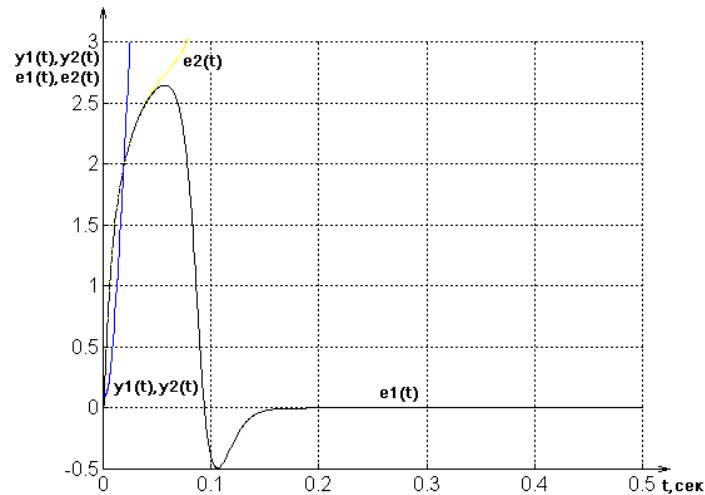


Рисунок 5.32 – Графики переходных процессов и ошибок слежения  $e(t)$  при граничных значениях линейно-нарастающего воздействия  $g(t)$

Результаты моделирования системы показаны на рисунках 5.33 и 5.34. Система обрабатывает постоянные воздействия  $g(t) < 2.99(t)$ . При  $g(t) \geq 2.99(t)$  система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения. Линейно возрастающее воздействие система обрабатывает до скорости 194 град/с. При воздействии  $g(t) \geq 194.5 \cdot t$  система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения.

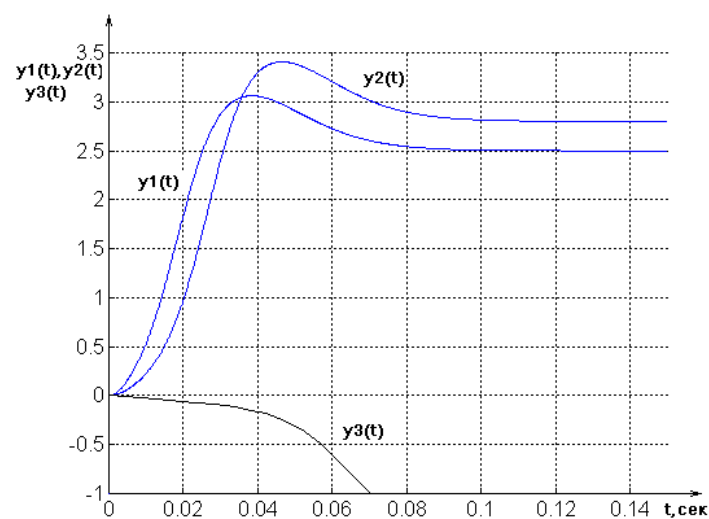


Рисунок 5.33 – Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия  $g(t)$

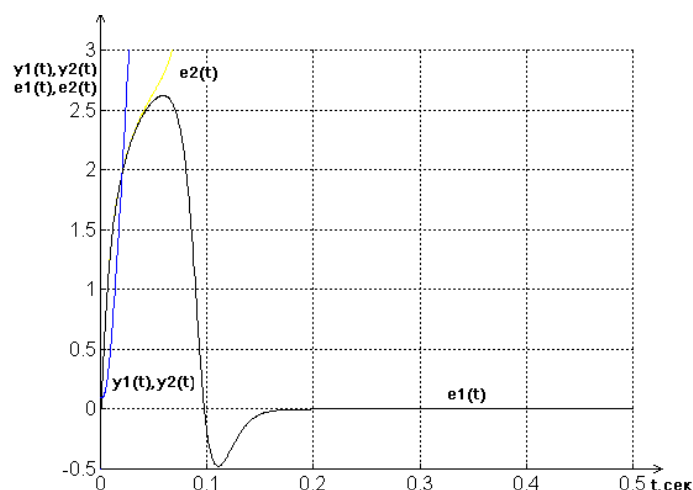


Рисунок 5.34 – Графики переходных процессов и ошибок слежения  $e(t)$  при граничных значениях линейно-нарастающего воздействия  $g(t)$

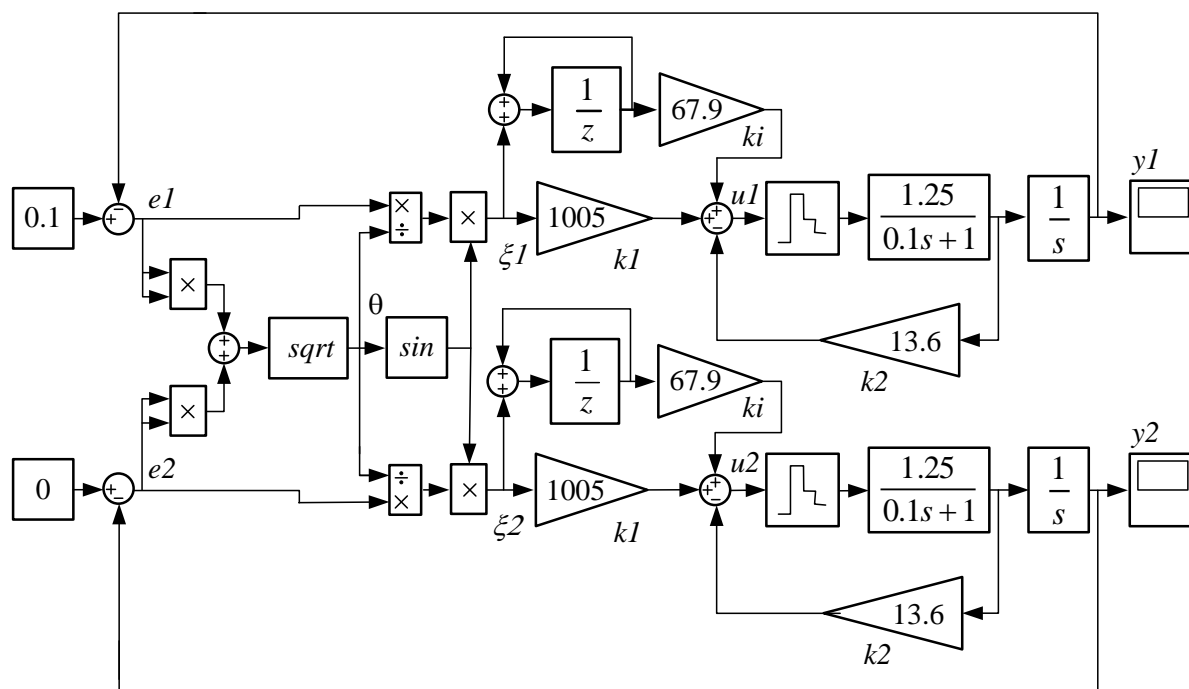


Рисунок 5.35 – Схема моделирования системы пространственного слежения с дискретным ПИ регулятором

На рисунке 5.35 показана схема моделирования системы пространственного слежения с дискретным аналогом ПИ регулятора. Параметры системы также синтезированы в разделе 5.2. На рисунке 5.36 можно видеть, что при различных значениях постоянных сигналов система ведет себя по-разному. При  $g(t) = 2.8(t)$  происходит затягивание переходного процесса в сравнении с переходным процессом при  $g(t) = 2.5(t)$ . Это обусловлено различными положениями входного сигнала на пеленгационной характеристике. При  $g(t) = 2.99(t)$  и больше система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения.

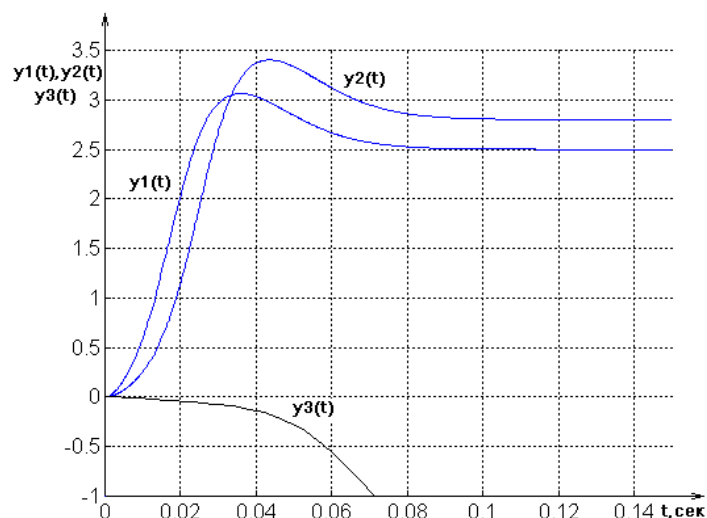


Рисунок 5.36 – Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия  $g(t)$

На рисунке 5.37 можно видеть, что при различных значениях линейно – нарастающего сигнала система ведет себя по-разному. При воздействии  $g(t) \leq 194.4 \cdot t$  происходит слежение за целью. При  $g(t) \geq 194.5 \cdot t$  система не может осуществить захват цели и происходит срыв слежения.

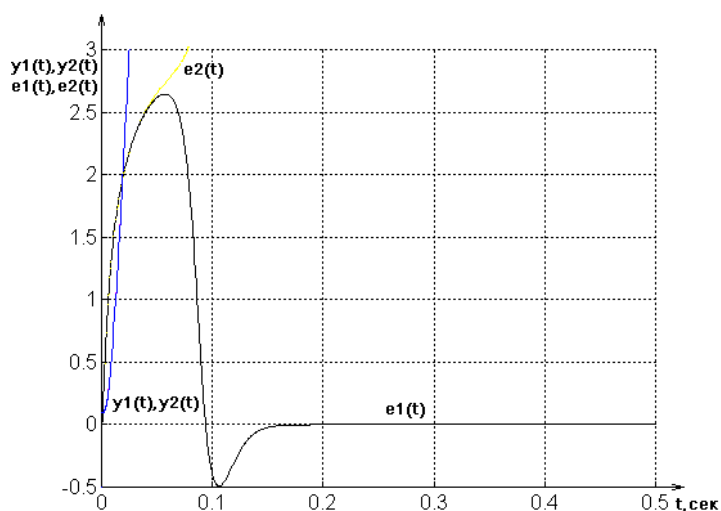


Рисунок 5.37 – Графики переходных процессов и ошибок слежения  $e(t)$  при граничных значениях линейно-нарастающего воздействия  $g(t)$

Данные результаты (см. рисунки 5.36, 5.37) получены для дискретной системы с ПИ регулятором, рассчитанным методом модального управления. Для оптимального же управления схема моделирования аналогична схеме, представленной на рисунке 5.35, с учетом того, что во втором случае матрица ЛСОС  $K = [-67.867 \quad 1005.2 \quad 13.598]$ . При  $g(t) \geq 2.99(t)$  система не может осуществить захват цели, и происходит срыв слежения. При линейно возрастающем воздействии  $g(t) \geq 190.7 \cdot t$  система не может осу-

ществить захват цели, и происходит срыв слежения. Процессы в системе показаны на рисунках 5.38 и 5.39.

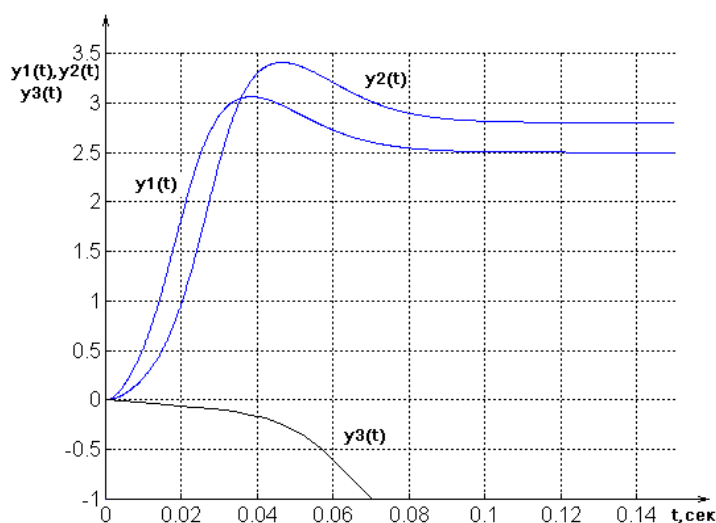


Рисунок 5.38 – Графики переходных процессов при граничных значениях постоянного воздействия  $g(t)$

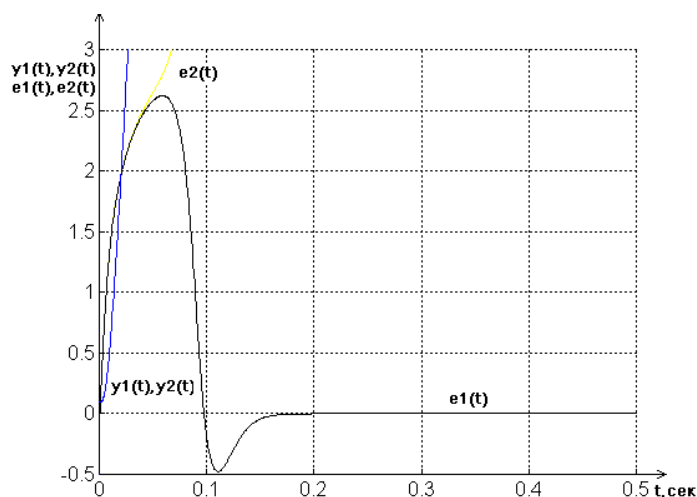


Рисунок 5.39 – Графики переходных процессов и ошибок слежения  $e(t)$  при граничных значениях линейно-нарастающего воздействия  $g(t)$

## Заключение

Анализ и проектирование цифровых систем управления, как показано в учебном пособии, может быть выполнен на базе единой методологии как для непрерывных, так и для дискретных (цифровых) систем управления. Основное различие и специфика состоит в математическом описании систем, в непрерывном случае – дифференциальными уравнениями, а в дискретном случае – разностными уравнениями. Современные технологии и методы модельного описания объектов и внешних воздействий оперируют

понятиями различных видов устойчивости цифровых систем. Рассмотренные технологии проектирования устанавливают связь различных видов устойчивости с показателями качества динамических процессов. Широкий спектр рассмотренных обобщенных структур цифровых регуляторов и аналитических методов их конструирования позволяет решать большой круг прикладных задач управления.

### **Список использованных источников**

1. Григорьев В.В., Быстров С.В., Бойков В.И., Болтунов Г.И., Мансурова О.К. Цифровые системы управления – СПб.: СПб ГУ ИТМО, 2011.- 133 с.
2. Григорьев В. В., Коровьяков А. Н. Анализ процессов в многосвязных системах на основе векторных функций Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1984. № 4.
3. Григорьев В. В., Коровьяков А. Н. Исследование качества многосвязных систем на основе метода сравнения // Автоматика и телемеханика. 1988. № 9.
4. Бушуев А. В., Григорьев В. В., Литвинов Ю. В. Синтез управлений по заданным оценкам качества дискретных систем с изменяющимися параметрами // Автоматика и телемеханика. 1984. № 11.
5. Бойков В.И., Григорьев В.В., Коровьяков А.Н., Михайлов С.В., Рюхин В.Ю., Мансурова О.К. Качественная экспоненциальная стохастическая устойчивость дискретных систем. // Изв. вузов. Приборостроение. 1998. Т.41. №7. С. 5-8.
6. Бобцов А.А., Быстров С.В., Григорьев В.В., Мотылькова М.М., Рабыш Е.Ю., Рюхин В.Ю., Мансурова О.К., Синтез модальных управлений для проектирования статических регуляторов в дискретных системах с периодически изменяющимися коэффициентами. // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. №5.
7. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В.Григорьев, В.Н. Дроздов, В. В. Лаврентьев, А. В. Ушаков. Л.: Машиностроение, 1983. - 245 с.: ил.
8. Олссон Г. Цифровые системы автоматизации и управления / Г. Олссон, Д. Пиани. — 3-е изд., перераб. и доп. — СПб. : Невский Диалект, 2001. — 557 с.
9. Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления: пер. с англ. / Ю. Т. Ту ; Под ред. В. В. Солодовникова. — М. : Машиностроение, 2004. — 703 с.: ил.
10. Розенвассер Е.Н. Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени - М.: Наука, 2005. – 125 с.: ил.
11. Трофимов А.И. Методы теории автоматического управления, ориентированные на применение ЭВМ. Линейные стационарные и нестационарные модели: учебник для вузов / А.И. Трофимов, Н.Д. Егупов, А.Н. Дмит-

риев. – М.: Энергоатомиздат, 2006. – 656 с.: ил.

12. Шишлаков, В.Ф. Синтез параметров непрерывных и импульсных многосвязных систем автоматического управления: монография / В.Ф. Шишлаков, С.А.Цветков, Д.В. Шишлаков: под ред. В.Ф. Шишлакова. СПб.: СПбГУАП, 2009. - 180 с.

13. Гайдук, А.Р. Анализ и аналитический синтез цифровых систем управления [Электронный ресурс] : монография / А.Р. Гайдук, Е.А. Плаксиенко. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/107282>.

14 Гаврилов, Е.Б. Цифровые системы управления. Сборник задач для индивидуальных заданий [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г.В. Саблина, Е.Б. Гаврилов .— Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010 .— 46 с. — ISBN 978-5-7782-1435-4 .— Режим доступа: <https://rucont.ru/efd/206016>

15. Поляков К.Ю. Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во СПбГМТУ, 2012. — 154 с.

16. Ощепков А.Ю. Проектирование цифровых систем управления. Теория и моделирование в MATLAB: учебно-методическое пособие / А.Ю. Ощепков; Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – 2-е изд. – Пермь, 2012.-138 с.

17. Григорьев В.В., Быстров С.В., Бойков В.И., Болтунов Г.И., Коровьяков А.Н., Мансурова О.К., Першин И.М. Проектирование регуляторов для стохастических систем и объектов с неопределенными параметрами. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. – 172 с.

18. Бойков В.И., Болтунов Г.И., Быстров С.В., Григорьев В.В., Литвинов Ю.В. Цифровая техника систем управления: Учебное пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2018. - 139 с.

## Приложение А

### Задания для расчетной работы

На рисунке П.1 представлена структура объекта управления (ОУ). Задан вид передаточных функций структурных динамических блоков непрерывной линейной части (НЛЧ) – апериодических звеньев

$$W_i(p) = \frac{K_i}{\tau_i p + 1}$$

где  $K_i$  – коэффициент передачи  $i$ -го элемента,  $\tau_i$  – постоянная времени  $i$ -го элемента, и интеграторов

$$W_i(p) = \frac{K_i}{p},$$

где  $K_i$  – коэффициент передачи  $i$ -го элемента;  $T$  – интервал дискретности работы импульсного элемента (ИЭ).

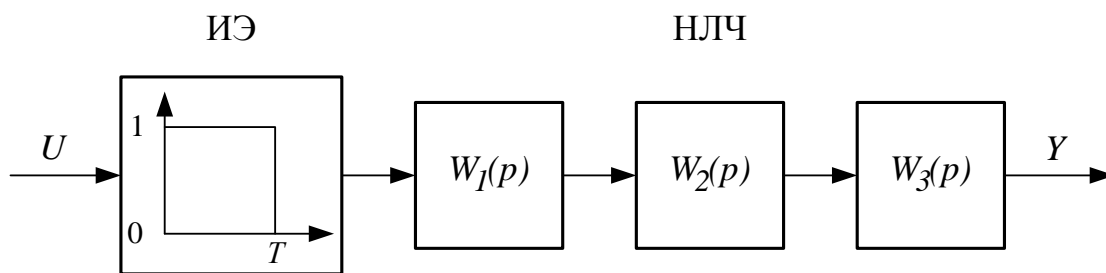


Рисунок П.1 – Структура объекта управления.

**Требуется:** спроектировать регулятор заданного типа, обеспечивающий в замкнутой системе требуемое время переходного процесса и заданное значение перерегулирования (параметры задаются преподавателем). Варианты заданий к расчетной работе приведены в Таблице П.1. В таблице интегрирующее звено обозначено символом И.

Возможные типы проектируемого регулятора: пропорциональный регулятор (П), пропорционально-интегральный регулятор (ПИ), пропорционально-дифференциальный регулятор (регулятор с устройством оценки, ПД).

Пояснительная записка к расчетной работе должна быть оформлена на листах формата А4 и содержать:

- титульный лист;
- задание на расчетную работу, подписанную руководителем;
- содержание расчетной работы;
- структурные схемы объекта управления и замкнутой системы;

- передаточные функции объекта управления для непрерывного и дискретного времени;
- расчеты параметров матриц модели ВСВ объекта управления для непрерывного и дискретного времени;
- сравнение реакций объекта управления на единичное ступенчатое воздействие для непрерывного и дискретного времени;
- расчет параметров эталонных моделей системы для непрерывного и дискретного времени;
- синтез параметров дискретного регулятора заданного типа;
- определение динамических параметров (показателей качества) синтезированной системы методом моделирования;
- заключение (полученные результаты и выводы о качестве синтезированной системы);
- список использованной литературы.

Графический материал расчетной работы должен быть оформлен в соответствии с требованиями ЕСКД. На структурных схемах должны быть проставлены направления движения сигналов и их обозначения. Графики должны быть представлены с оцифрованными осями и обязательно с сеткой.

Таблица П.1. Варианты заданий к расчетной (курсовой) работе

№ вар.	Параметры объекта							Параметры системы		
	Т, с.	W1		W2		W3		Тип регулятора	Время пер. проц., с.	Пере-регулиру-ров., %
		K1	T1, с.	K2	T2, с.	K3	T3, с.			
1	0.005	70.00	0.10	60.00	0.10	0.02	И	П	0.150	10
2	0.005	85.00	0.09	70.00	0.10	0.02	И	П	0.165	10
3	0.005	50.00	0.08	80.00	0.10	0.02	И	П	0.140	10
4	0.005	60.00	0.07	90.00	0.10	0.02	И	П	0.125	10
5	0.005	75.00	0.06	75.00	0.10	0.02	И	П	0.175	10
6	0.004	50.00	0.05	100.00	0.15	0.01	И	П	0.120	10.00
7	0.004	80.00	0.08	100.00	0.12	0.01	И	П	0.132	10.00
8	0.004	60.00	0.09	100.00	0.14	0.01	И	П	0.112	10.00
9	0.004	70.00	0.07	100.00	0.11	0.01	И	П	0.100	10.00
10	0.004	90.00	0.06	100.00	0.12	0.01	И	П	0.140	10.00
11	0.003	30.00	0.05	50.00	0.11	0.05	И	П	0.090	10.00
12	0.003	20.00	0.05	75.00	0.11	0.05	И	П	0.099	10.00
13	0.003	15.00	0.06	80.00	0.12	0.05	И	П	0.084	10.00
14	0.003	25.00	0.06	45.00	0.12	0.05	И	П	0.075	10.00
15	0.003	10.00	0.08	90.00	0.15	0.05	И	П	0.105	10.00
16	0.003	30.00	0.08	60.00	0.15	0.04	И	П	0.084	10.00

Таблица П.1. Варианты заданий к расчетной работе (продолжение)

№ вар.	Параметры объекта							Параметры системы		
	Т, с.	W1		W2		W3		Тип регулятора	Время пер. проц., с.	Пере-регулиру-ров., %
		K1	T1, с.	K2	T2, с.	K3	T3, с.			
17	0.003	35.00	0.06	70.00	0.14	0.04	И	П	0.078	10.00
18	0.003	55.00	0.08	40.00	0.14	0.04	И	П	0.081	10.00
19	0.003	45.00	0.05	55.00	0.13	0.04	И	П	0.060	10.00
20	0.003	30.00	0.07	85.00	0.13	0.04	И	П	0.072	10.00
21	0.0025	55.00	0.05	40.00	И	0.03	И	П	0.075	10.00
22	0.0025	200.00	0.06	40.00	И	0.01	И	П	0.083	10.00
23	0.0025	100.00	0.04	50.00	И	0.02	И	П	0.070	10.00
24	0.0025	120.00	0.03	50.00	И	0.02	И	П	0.063	10.00
25	0.0025	175.00	0.03	60.00	И	0.01	И	П	0.088	10.00
26	0.0025	35.00	0.06	60.00	И	0.04	И	П	0.100	10.00
27	0.0025	40.00	0.07	55.00	И	0.04	И	П	0.105	10.00
28	0.0025	80.00	0.04	65.00	И	0.02	И	П	0.110	10.00
29	0.0025	125.00	0.05	75.00	И	0.01	И	П	0.088	10.00
30	0.0025	110.00	0.06	80.00	И	0.01	И	П	0.095	10.00
31	0.005	нет	нет	600.00	0.10	0.20	И	ПИ	0.150	35.00
32	0.005	нет	нет	550.00	0.10	0.20	И	ПИ	0.165	35.00
33	0.005	нет	нет	400.00	0.10	0.20	И	ПИ	0.140	35.00
34	0.005	нет	нет	450.00	0.10	0.20	И	ПИ	0.125	35.00
35	0.005	нет	нет	350.00	0.10	0.20	И	ПИ	0.175	35.00
36	0.004	нет	нет	900.00	0.15	0.10	И	ПИ	0.120	35.00
37	0.004	нет	нет	950.00	0.12	0.10	И	ПИ	0.132	35.00
38	0.004	нет	нет	850.00	0.14	0.10	И	ПИ	0.112	35.00
39	0.004	нет	нет	800.00	0.11	0.10	И	ПИ	0.100	35.00
40	0.004	нет	нет	875.00	0.12	0.10	И	ПИ	0.140	35.00
41	0.003	нет	нет	450.00	0.11	0.25	И	ПИ	0.090	35.00
42	0.003	нет	нет	375.00	0.11	0.25	И	ПИ	0.099	35.00
43	0.003	нет	нет	325.00	0.12	0.25	И	ПИ	0.084	35.00
44	0.003	нет	нет	425.00	0.12	0.25	И	ПИ	0.075	35.00
45	0.003	нет	нет	320.00	0.15	0.25	И	ПИ	0.105	35.00
46	0.003	нет	нет	975.00	0.15	0.08	И	ПИ	0.084	35.00
47	0.003	нет	нет	950.00	0.14	0.80	И	ПИ	0.078	35.00
48	0.003	нет	нет	250.00	0.08	0.40	И	ПД	0.081	10.00
49	0.003	нет	нет	225.00	0.05	0.40	И	ПД	0.060	10.00
50	0.003	нет	нет	175.00	0.07	0.40	И	ПД	0.072	10.00
51	0.002	нет	нет	280.00	0.05	0.30	И	ПД	0.075	10.00
52	0.002	нет	нет	950.00	0.06	0.10	И	ПД	0.083	10.00
53	0.002	нет	нет	450.00	0.04	0.20	И	ПД	0.070	10.00
54	0.002	нет	нет	550.00	0.03	0.20	И	ПД	0.063	10.00
55	0.002	нет	нет	850.00	0.03	0.10	И	ПД	0.088	10.00
56	0.002	нет	нет	150.00	0.06	0.40	И	ПД	0.100	10.00
57	0.002	нет	нет	200.00	0.07	0.40	И	ПД	0.105	10.00

Таблица П.1. Варианты заданий к расчетной работе (продолжение)

№ вар.	Параметры объекта							Параметры системы		
	Т, с.	W1		W2		W3		Тип регулятора	Время пер. проц., с.	Пере-регулиру-ров., %
		K1	T1, с.	K2	T2, с.	K3	T3, с.			
58	0.002	нет	нет	475.00	0.04	0.20	И	ПД	0.110	10.00
59	0.002	нет	нет	470.00	0.04	0.20	И	ПД	0.110	10.00
60	0.002	нет	нет	520.00	0.04	0.20	И	ПД	0.110	10.00
61	0.002	нет	нет	550.00	0.04	0.20	И	ПД	0.110	10.00
62	0.002	нет	нет	600.00	0.04	0.20	И	ПД	0.110	10.00
63	0.002	нет	нет	580.00	0.04	0.20	И	ПД	0.110	10.00
64	0.002	нет	нет	940.00	0.05	0.10	И	ПД	0.088	10.00
65	0.002	нет	нет	900.00	0.06	0.10	И	ПД	0.095	10.00

### Пример хода выполнения расчетной работы

Цель работы: Выполнить синтез ПИ регулятора, обеспечивающего заданные показатели качества переходного процесса в замкнутой системе.

Структурная схема объекта управления показана на рисунке П.2.

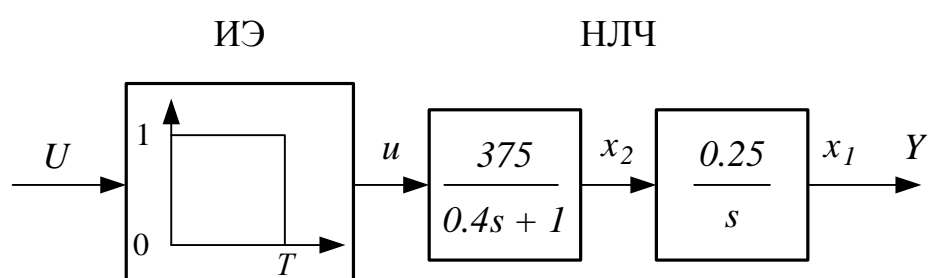


Рисунок П.2- Структурная схема заданного объекта управления

Интервал дискретности  $T=0.003$  с. Требуемые показатели качества системы  $t_n = 0.099$  с.;  $\sigma = 35\%$ ;

Передаточной функции интегрирующего звена соответствует дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_1 = 0.25x_2$$

Передаточной функции звена  $\frac{375}{0.4s+1}$  соответствует дифференциальное уравнение

$$0.4\dot{x}_2 = -x_2 + 375u,$$

или

$$\dot{x}_2 = -2.5x_2 + 937.5u.$$

Объединяя уравнения модели в единую систему, получим описание объекта в непрерывном времени в форме ВСВ. В результате получаем:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A_H X + B_H U, \\ Y &= CX,\end{aligned}$$

где:  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix}$ ,  $B_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 937.5 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Перейдем к дискретному описанию объекта, используя формулы

$$A = e^{TA_H}; \quad B = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{T^i A_H^{i-1}}{i!} \right) B_H,$$

получим:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} + BU(m) \\ Y(m) &= C \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

причем матрица  $C$  осталась неизменной, а матрицы дискретной модели равны:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.000747 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.0011 \\ 2.80 \end{bmatrix}.$$

По полученным матрицам вычислим дискретную передаточную объекта управления. Вычисления параметров модели объекта управления и далее синтез регулятора удобно выполнять в пакете MatLab [16]. Произведем вычисление дискретной передаточной функции объекта управления по выражению  $W(z) = C(zI - A)B$ . Для этого воспользуемся функцией MatLab «ss2tf». Получаем:

$$W(z) = \frac{0.001052z + 0.001049}{z^2 - 1.9925z + 0.9925}.$$

Для вычисления матрицы дискретного описания объекта управления используем функцию MatLab «c2d». Для этого зададим описание объекта управления передаточной функцией в непрерывном времени функцией «tf»:

$$h = tf(93.75, [0.4 \ 1 \ 0]),$$

и далее вычислим дискретную передаточную функцию

$$hd = c2d(h, 0.003).$$

Схема моделирования, позволяющая сравнить реакции на единичное ступенчатое воздействие непрерывной и дискретной моделей объекта управления, представлена на рисунке П.3. На элементе Scope отображается реакция ОУ, описываемого моделью в непрерывном времени. На Scope отображается также реакция ОУ, описываемого в дискретном времени.

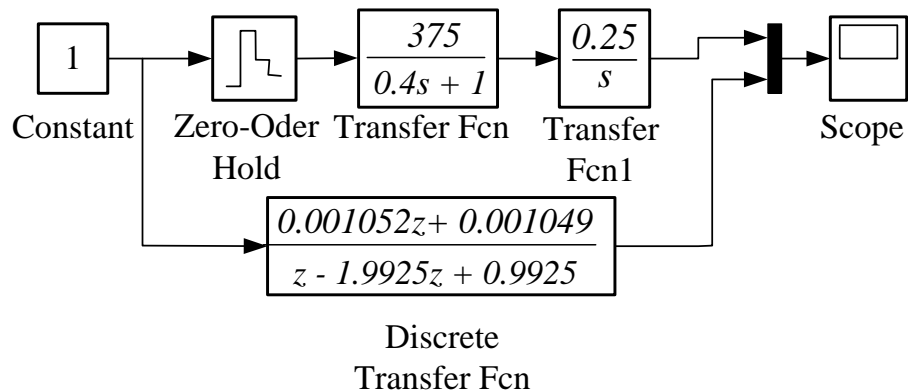


Рисунок П.3 – Схема для сравнения реакций непрерывного и дискретного объектов управления

Результат моделирования поведения ОУ (переходной характеристики) представлен на рисунке П.4. Видно, что реакции моделей совпадают, т.е. переход от непрерывного времени к дискретному выполнен корректно.

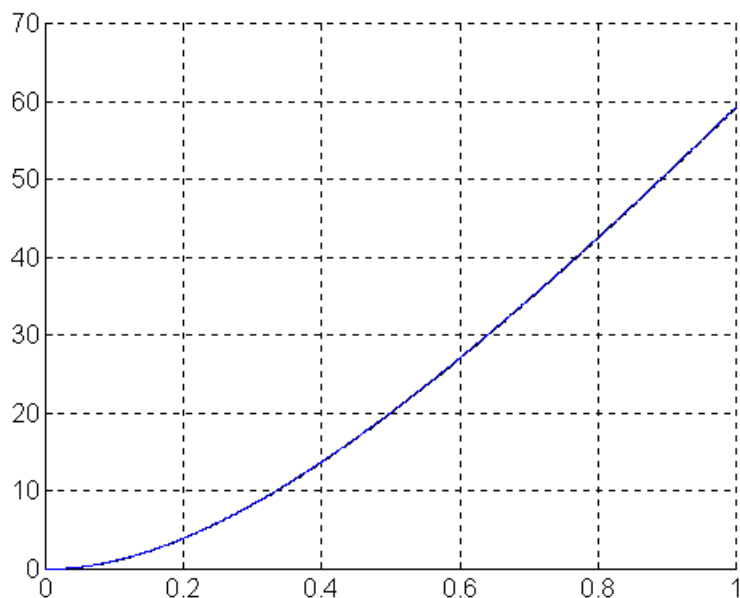


Рисунок П.4 – Результат моделирования поведения ОУ

Выполним синтез ПИ регулятора.

Сведём задачу синтеза к выбору матриц эталонной модели  $\Gamma$ ,  $H$ , решению уравнения типа Сильвестра:

$$M\Gamma - AM = -BH$$

и вычислению матрицы обратных связей  $K = HM^{-1}$  системы управления.

Исходя из заданных показателей качества, выберем корни характеристического полинома непрерывной системы. С учетом наличия в регуляторе интегрирующего звена, повышающего порядок уравнения системы на единицу, выберем стандартный биномиальный полиномом третьей степени  $(\lambda + w_0)^3$  для которого  $t_{\Pi} * w_0 = 8.5$ . По заданному времени переходного процесса, равного 0.099 с, определяем желаемые собственные числа характеристического полинома:  $\lambda_{1,2,3} = -\frac{8.5}{0.099} \approx -85.86$ .

Сформируем матрицу  $\Gamma_H$  эталонной модели замкнутой системы (непрерывное время):

$$\Gamma_H = \begin{bmatrix} -85.86 & 1 & 0 \\ 0 & -85.86 & 1 \\ 0 & 0 & -85.86 \end{bmatrix}$$

и матрицу выходов  $H$  из условия полной наблюдаемости пары  $H, \Gamma$ :

$$H = [1 \ 0 \ 0].$$

Произведем вычисление матрицы  $G$  эталонной модели для дискретного времени:

$$G = \exp(\Gamma_H T) = \begin{bmatrix} 0.7729 & 0.00232 & 0.000035 \\ 0 & 0.7729 & 0.00232 \\ 0 & 0 & 0.7729 \end{bmatrix}.$$

Решая уравнение типа Сильвестра в пакете MatLab с использованием функции «lyap»:

$$M = \text{liap}(-A, G, BH),$$

получаем

$$M = \begin{bmatrix} 0.0376 & 0.0008 & 0 \\ -12.8973 & -0.1378 & -0.0036 \\ 0.1655 & 0.0054 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

Используя равенство  $\bar{K} = HM^{-1}$ , находим матрицу коэффициентов обратных связей:

$$K = [70.6723 \quad 0.212 \quad -5.5705],$$

которая с учетом отрицательной обратной связи по выходной переменной определяет настройку регулятора:  $k_1 = 70.67$ ,  $k_2 = -0.212$ ,  $k_3 = 5.57$ .

Полученное решение легко проверить, вычисляя собственные числа характеристических полиномов для эталонной и синтезированной систем. Для этого воспользуемся функцией MatLab «eig». Собственные числа матрицы  $G$  эталонной системы (дискретное время) равны  $\lambda_{1,2,3} = 0.7729$ .

Собственные числа матрицы синтезированной замкнутой системы (дискретное время) вычислим как

$$e = \text{eig}(A - B * K).$$

Они равны  $\lambda_{1,2,3} = 0.7729$ , что подтверждает корректность выполненных расчетов.

Итоговая схема моделирования системы управления непрерывным объектом с использованием дискретного аналога ПИ регулятора представлена на рисунке П.5.

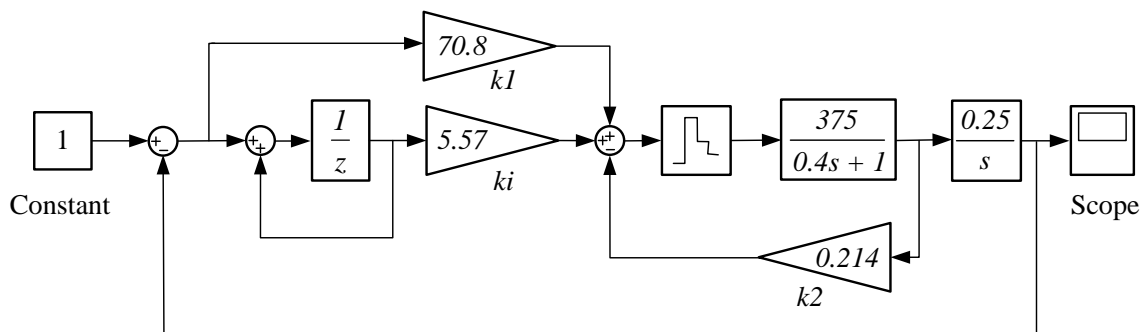


Рисунок П.5 – Схема моделирования системы с ПИ регулятором

Переходная характеристика синтезированной системы показана на рисунке П.6.

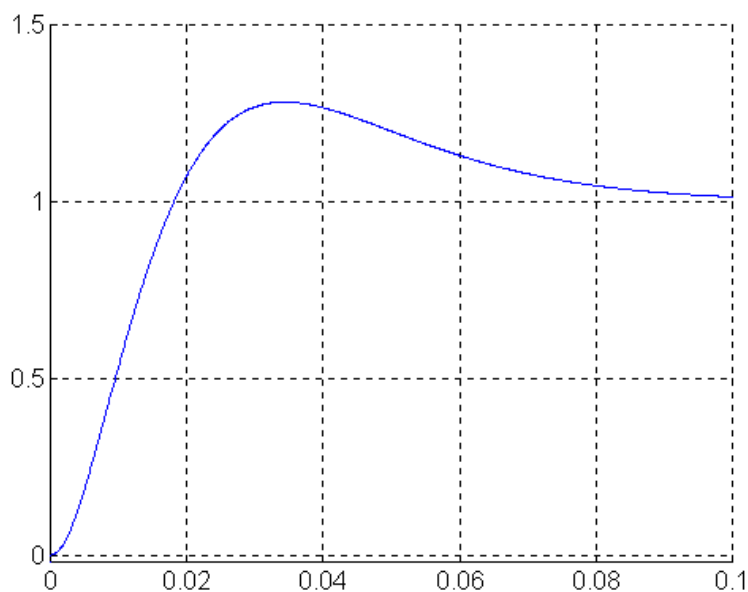


Рисунок П.6 – Переходная характеристика замкнутой системы

В результате получили время переходного процесса 0,099 с и перерегулирование 30%.

Выводы: Синтезирован дискретный ПИ регулятор, работающий с заданным периодом квантования времени 0.003 с. В качестве эталона был выбран полином Ньютона 3-й степени (непрерывное время), корни которого были вычислены по заданному времени переходного процесса и составили -85.86. В дискретном времени эталонная модель задается полиномом, корни которого равны 0.7729. Коэффициенты дискретного ПИ регулятора были вычислены через решение уравнения типа Сильвестра и составили  $k_1 = 70.67$ ,  $k_2 = -0.212$ ,  $k_3 = 5.57$ . Моделирование работы системы в непрерывном времени показало, что время реакции системы на единичное ступенчатое воздействие не превосходит 0.099 с, перерегулирование не превышает 30%, установившееся значение рассогласования равно 0. Следовательно, спроектированный дискретный регулятор отвечает требованиям технического задания.

Валерий Владимирович Григорьев  
Сергей Владимирович Быстров  
Владимир Иванович Бойков  
Геннадий Иванович Болтунов  
Ольга Карибековна Мансурова

## **ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

В авторской редакции  
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО  
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова  
Подписано к печати  
Заказ №  
Тираж  
Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**

**Университета ИТМО**

197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49