

А.М. ПИЩУХИН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫБОРА СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

П-36

УДК 65.011.56

Рецензент

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой системного анализа и управления Абдрашитов Р.Т.

Пищухин А.М.

**П-36 Автоматизация технологических процессов на основе гибких
производственных систем: Учебное пособие. – Оренбург: ГОУ
ОГУ, 2004.- 111 с.**

ISBN

Учебное пособие предназначено для специальности «Автоматизация технологических процессов и производств» по дисциплинам «Автоматизация производственных процессов» и «Системы автоматизации и управления». В нем углубляются сведения по специфике автоматизации производства на основе метасистемного подхода. В конце книги имеются варианты заданий на выполнение расчетно-графической работы.

Пособие может быть полезно аспирантам и специалистам в области автоматизации.

ББК 32.965

© Пищухин А.М., 2004

© ГОУ ВПО ОГУ, 2004

ISBN

Введение

В настоящее время выбор средств автоматизации осуществляется на основе их технико-экономических показателей и никак не привязывается к быстро изменяющейся рыночной экономике.

Вместе с тем существует теория производительности труда Шаумяна Г.А., которая позволяет выбирать средства автоматизации, максимизирующие производительность общественного труда и доводящая выбор от экономических показателей вплоть до режимов резания. Однако она справедлива только для «жесткой автоматизации».

С другой стороны, сейчас «жесткая автоматизация» применяется довольно редко, поскольку почти все производственные системы работают под управлением компьютеров, а ассортимент выпускаемой продукции быстро меняется.

Для того, чтобы появились теоретические основания для рационального выбора средств гибкой автоматизации в учебном пособии предлагается расширенный по сравнению с коэффициентом производительности труда - коэффициент удельного эффекта. К его достоинствам относится необязательность одинаковых единиц измерения затрат и эффекта от автоматизации, отсутствие отрицательных значений, а также увеличение различительной способности в практически значимой области больших затрат и малых эффектов за счет нелинейности.

Другой теоретической основой эффективного выбора является развиваемый в данной работе метасистемный подход. Поскольку при выборе средств автоматизации речь идет о сравнении показателей систем автоматизации в целом, постольку необходимо иметь некоторое множество систем, то есть метасистему, из которой и осуществляется выбор. Метасистемный подход влечет за собой необходимость рассмотрения

процесса автоматизации во времени, а также решения шести метасистемных задач, оптимизирующих выбор.

Процесс выбора средств автоматизации на основе метасистемного подхода и предложенного коэффициента доведен до конкретного алгоритма. С применением этого алгоритма разработаны задания студентам для расчетных работ.

Автор признателен рецензентам профессорам Рамзесу Талгатовичу Абдрашитову и Анатолию Ивановичу Сердюку, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

1 Диапазоны применения средств автоматизации в машиностроении

Автоматизация всегда является затратным процессом, целесообразность которого необходимо обосновывать экономически, социально или «качественно». В связи с этим, остро стоит вопрос о соответствии (адекватности) средств автоматизации условиям их применения. По отношению к машиностроению адекватность средства автоматизации определяется масштабом производства.

На рисунке 1 изображена зависимость вероятности применения средств автоматизации от изменения масштаба производства. По горизонтальной оси отложено количество производимых в год изделий, по вертикальной – вероятность применения того или иного средства автоматизации. Здесь: УО – универсальное оборудование, обеспечивающее наибольшую гибкость производства, но обладающее низкой производительностью, ГПЯ – гибкая производственная ячейка, ГПС – гибкая производственная система, ПАЛ – переналаживаемая автоматическая линия, НПАЛ – непереналаживаемая автоматическая линия, РКАЛ – роторно-конвейерная автоматическая линия.

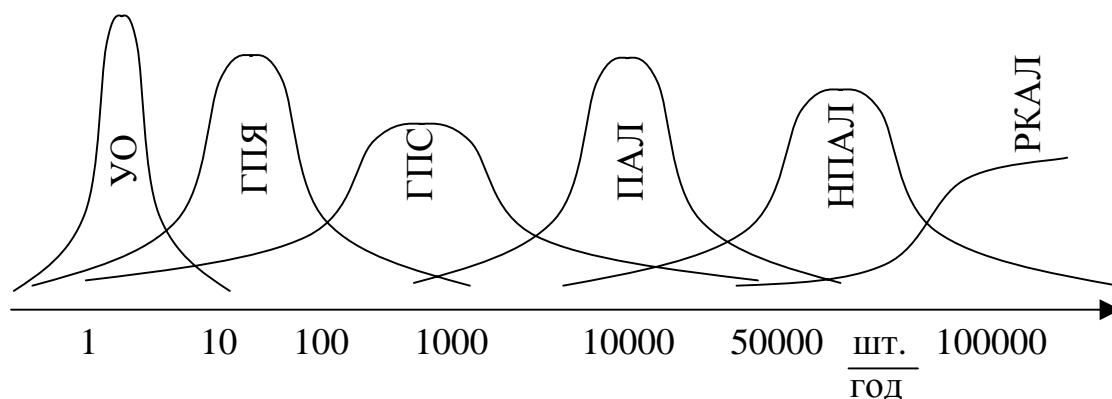


Рисунок 1 – Диапазоны применения средств автоматизации

Исторически автоматизация проходила преимущественно справа налево вдоль горизонтальной оси рисунка 1, то есть в первую очередь автоматизировалось массовое производство с помощью автоматических линий. Поэтому такая автоматизация является классической, традиционной.

С появлением станков с числовым программным управлением стало возможным автоматизировать производства с быстро меняющимся ассортиментом и даже единичное производство в той или иной степени. Наступил период гибкой автоматизации производства.

2 Гибкая автоматизация

В настоящее время около 80 % мирового производства продукции осуществляется малыми сериями от 10 до 50 изделий. Если оценить время, в течение которого в ходе производства изделия имеет место автоматизированный процесс, то эта величина окажется достаточно малой и, например, в металлообработке составляет в среднем всего около 2 %. При этом общее время обработки составляет около 5 %, а остальные 95 % времени приходится на транспортировку, ожидание и тому подобные «немашинные» операции /1/.

Традиционная автоматизация, основанная на специальных средствах и предназначенная для массового производства, имеет следующие ограничения:

- быстрое моральное старение;
- длительный срок и высокую стоимость освоения новой продукции;
- ограниченные возможности для автоматизации операций, требующих гибкости в процессе их выполнения, таких, например, как сборка, контрольно-испытательные и ремонтные операции.

Учитывая общую экономически обусловленную тенденцию современного производства к увеличению его мобильности в отношении как выпускаемой продукции, так и технологии производства, значение перечисленных ограничений со временем быстро возрастает.

Новые возможности в автоматизации производства для преодоления существующих ограничений дает гибкая автоматизация. В наиболее полном

виде гибкое автоматизированное производство (ГАП) состоит из следующих частей:

гибкого автоматизированного технологического оборудования, которое непосредственно реализует технологический процесс изготовления изделий;

систем автоматизированной разработки подлежащих изготовлению изделий (АСНИ, САПР) и технологической подготовки их производства (АСТПП), реализуемых с помощью автоматизированных рабочих мест (АРМ).

К этим составляющим добавляется автоматизированная система управления (АСУ) и транспортно-накопительная система (АТНС), образуя тем самым гибкую производственную систему (ГПС).

Предел, к которому стремится процесс гибкой автоматизации производства, можно коротко определить так:

- 1) автоматическое производство изделий сколь угодно малыми партиями;
- 2) себестоимость и производительность близкие их значениям, достигнутые в современном массовом производстве;
- 3) практически безлюдное производство;
- 4) комплексная автоматизация всех составляющих производства от разработки конструкторской документации на выпускаемые изделия до планирования и управления производством в целом.

Таким образом, можно сказать, что при полной реализации идеи ГАП на вход ГАП должны подаваться технические задания на очередные изделия, а на выходе выдаваться готовая продукция. При этом весь процесс будет происходить круглосуточно и осуществляться на основе машинных носителей информации, то есть на основе безбумажной технологии.

Поясним дополнительно первый, сформулированный выше признак гибкой автоматизации, которым, по существу, дано определение понятия «гибкости» производства как возможности автоматизированного производства изделий сколь угодно малыми партиями.

Во-первых, надо отметить, что при этом имеются в виду не просто мелкосерийное производство и тем более с заранее известным объемом выпуска продукции, а возможность быстрого перехода на выпуск новой продукции в заранее непредвиденный момент, когда это потребуется по различным соображениям. Поэтому в равной степени это относится и к крупносерийному и массовому производствам.

В целом понятие «гибкость» можно определить как возможность быстрой реакции производства на следующие внешние и внутренние «возмущения»:

1) по заданию извне переходить на выпуск новой продукции в пределах заданной номенклатуры путем смены управляющих программ, а при изменении этой номенклатуры путем изменения состава используемого технологического оборудования;

2) при выходе из строя отдельных единиц оборудования или других частей производства быстро осуществлять их замену или перестраивать технологический процесс.

Во-вторых, для мелкосерийного производства степень гибкости по отношению к первому ее признаку обычно характеризуется количеством типов изделий, которые можно изготавливать только за счет смены программ. Например, типичные значения этой величины для современного ГАП механообработки – десятки типов деталей и сотни их модификаций.

Антиподом ГПС в отношении гибкости являются автоматические линии с так называемой «жесткой» автоматизацией. Диапазоны их эффективности определяются рисунком 2, на котором изображены зависимости себестоимости изготовления продукции от применяемых средств автоматизации.

В настоящее время для классической автоматизации производства существует достаточно стройная теория, разработанная Шаумяном Г.А., в то время как для гибкой автоматизации такая теория отсутствует. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

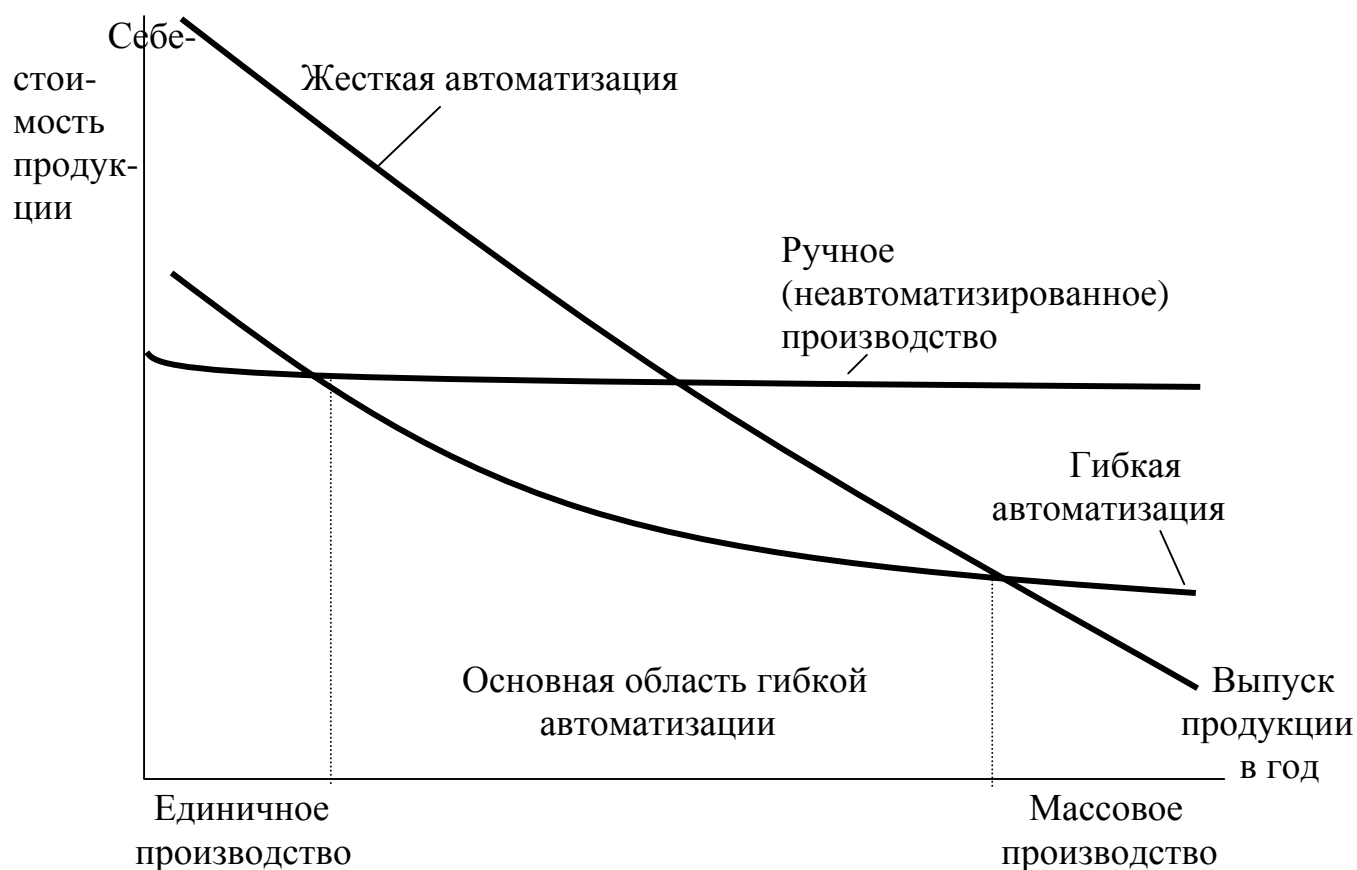


Рисунок 2 – Зависимость себестоимости изготовления продукции от степени автоматизации технологического процесса.

3 Общие положения о синтезе систем автоматизации

Поскольку задача проектирования системы автоматизации является в общем случае сложной, при ее решении целесообразно выделить иерархию. В [2] выделяется четыре уровня: экономический, технологический, структурный (алгоритмический) и параметрический (технический). На наш взгляд необходимо дополнить эту декомпозицию еще одним уровнем – социальным, поскольку при автоматизации большое влияние имеют юридические, нравственные, экологические и ряд других социальных аспектов, которые могут обесценить результаты автоматизации.

На экономическом уровне ставятся и решаются задачи оптимизации экономических показателей. На технологическом уровне решаются задачи

оптимизации технологии. Структурный уровень (в теории управления структурная схема тесно связана с алгоритмом управления, поэтому этот уровень можно назвать также алгоритмическим) связан с решением задач выработки алгоритмов оптимального управления технологическими процессами. Наконец, параметрический уровень решает задачи параметрической оптимизации системы управления. При этом критерии оптимального синтеза выявляются на более высоком уровне иерархии, а используются на более низком уровне.

Синтез любых систем автоматизации необходимо проводить с помощью методологии технико-экономического проектирования. При синтезе систем «жесткой» автоматизации за основу берется теория производительности общественного труда Шаумяна Г.А., сформулированная им еще в 1932-1933 гг. /3/. Её сущностью является коэффициент повышения производительности общественного труда, равный отношению произведённой продукции к затратам, связанным с её изготовлением.

Эта теория позволяет не только довести проектирование до расчёта технологических параметров и требуемой надёжности применяемого оборудования, но даже наметить три направления автоматизации: снижение затрат «живого» труда, снижение стоимости оборудования и повышение производительности технологического оборудования.

Важнейшими факторами производительности труда являются затраты труда на создание, обслуживание и эксплуатацию автоматизированной технологической системы. Эти затраты можно представить состоящими из трех компонентов:

- 1) единовременные затраты прошлого труда $T_{\text{п}}$, необходимые для создания оборудования, зданий, сооружений и т.п.;
- 2) текущие затраты прошлого труда $T_{\text{в}}$, которые включают в себя часть овеществленного труда, затрачиваемую на основные и вспомогательные материалы, запчасти, электроэнергию, инструменты, топливо, смазку и т.п., необходимые для производства изделий. В то время как текущие

затраты прошлого труда непрерывно растут пропорционально времени (годам), т.е. количеству выпущенной продукции, единовременные затраты прошлого труда являются разовыми, рассчитанными на весь срок службы машины N лет, то есть носят постоянный характер;

- 3) текущие затраты живого труда $T_{ж}$ обслуживающих рабочих, которые, используя средства, создают новые материальные ценности.

Таким образом, производственный процесс обеспечивается единством рабочей силы и средств производства – совместными годовыми затратами $T_{ж}$, единовременными затратами средств труда $T_{п}$, рассчитанными на N лет, и годовыми затратами предметов труда $T_{в}$. Суммарные затраты за весь срок действия средств труда

$$T = T_{п} + N(T_{ж} + T_{в}). \quad (1)$$

Производительность общественного труда оценивается путем сопоставления результатов трудового процесса – количества выпущенной продукции с суммарными трудовыми затратами, необходимыми для ее выпуска за некоторый интервал времени – срок эксплуатации оборудования N лет:

$$A_{т} = W/T, \quad (2)$$

где $A_{т}$ – производительность труда; W – выпущенная годная продукция; T – суммарные трудовые затраты, необходимые для выпуска продукции.

Так как единовременные трудовые затраты на оборудование, здания и сооружения реализуются постепенно в течение срока службы, производительность труда определяется с учетом фактора времени - прежде всего сроков службы.

Определив суммарные затраты T и выпуск продукции W за весь срок службы, легко найти среднегодовые затраты, которые наиболее широко приняты на практике.

Размерность производительности труда в обобщенном виде

$$A_{т} = [\text{продукция/труд}]. \quad (3)$$

Выпущенная годная продукция измеряется либо в физических величинах (штуки, единицы длины, массы, объема и др.), либо в стоимостном выражении (рубли). Суммарные трудовые затраты выражаются либо в единицах абстрактного труда (человеко-часы, человеко-дни и др.), либо в денежном выражении (рубли). В соответствии с этим при расчетах производительность труда может иметь различную размерность, а именно: [шт./чел-ч]; [шт./руб.]; [руб./руб.].

Количество выпущенной продукции зависит от того, сколько лет работает оборудование.

При постоянной производительности оборудования

$$W = Q_{\Gamma}N, \quad (4)$$

где Q_{Γ} – годовой фактический выпуск продукции.

Подставляя значение W и T в формулу (2), получаем

$$A_T = \frac{Q_{\Gamma}N}{T_{\Pi} + N(T_v + T_{\text{ж}})}. \quad (5)$$

Проанализируем полученную зависимость графически, выразив W , T и A_T в функции сроков службы N . Здесь N – не текущее время эксплуатации оборудования, а возможный срок службы как переменная величина, неизвестная в процессе проектирования. Анализ производительности труда в функции срока службы показывает ее переменный характер даже при неизменных технико-экономических характеристиках (производительность оборудования, его надежность, степень автоматизации и эксплуатационные затраты).

Уровень производительности труда при малых сроках службы относительно невелик, поскольку на сравнительно малый объем выпущенной за это время продукции требуются значительные затраты на средства производства. С ростом сроков службы производительность труда увеличивается, так как единовременные затраты овеществленного труда T_{Π} раскладываются в этом случае на больший объем выпущенной продукции.

Представленный на рисунке 3 характер изменения производительности труда в зависимости от сроков службы показывает, что при малых сроках службы рост производительности труда довольно интенсивен, затем замедляется и при больших сроках практически прекращается, асимптотически приближаясь к своему пределу:

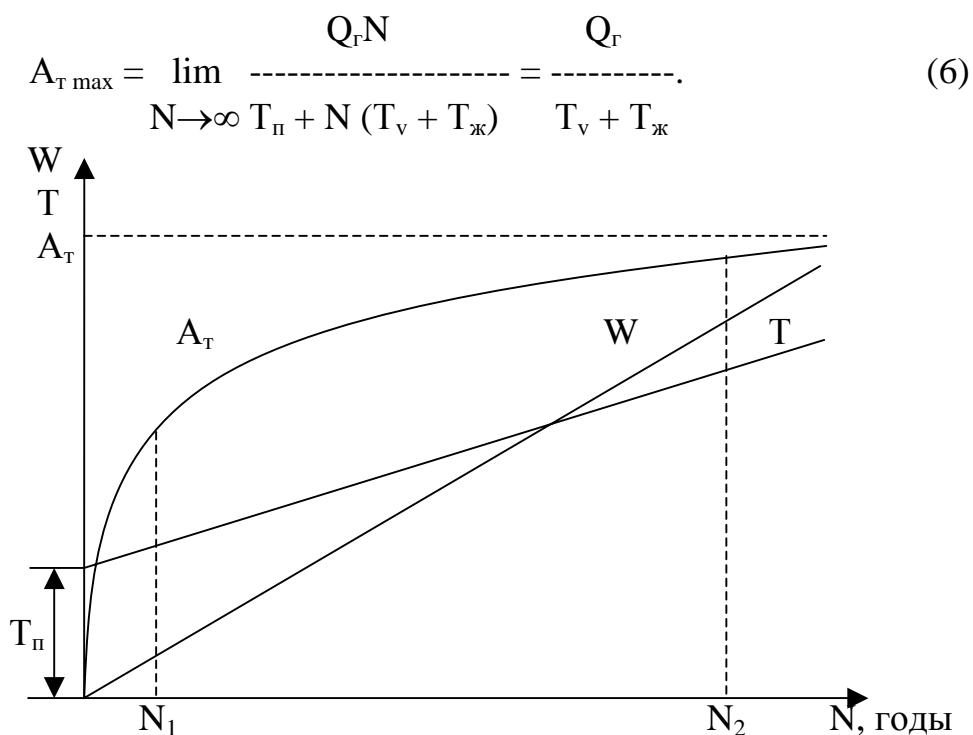


Рисунок 3 - Зависимость объема выпущенной продукции, эксплуатационных затрат и производительности труда от сроков службы при неизменных эксплуатационных характеристиках

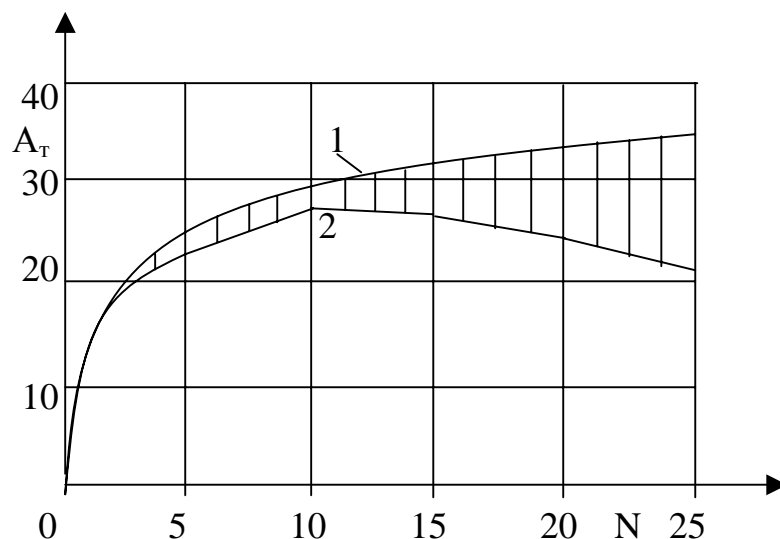
Если сроки службы оборудования находятся за пределами N_2 , то рост производительности труда мало зависит от сроков службы, т.е. практически прекращается, что может войти в противоречие с запланированным ростом общественного труда. Отсюда можно сделать вывод, что производительность труда при данном уровне техники имеет свои пределы; чтобы выйти за эти пределы, необходимо непрерывно совершенствовать технологию и технику. Другой вывод – сроки службы машин определяются не только их физическим износом, но и характером зависимости производительности труда от сроков службы и запланированным темпом роста

производительности труда, т.е. сроками морального износа оборудования. Так, если при сроках службы от 0 до N_2 их увеличение на год позволяет значительно повысить производительность труда, то дальнейшее увеличение (больше N_2) не дает заметного роста производительности труда. Таким образом, возникает вопрос о целесообразности сроков службы оборудования, лежащих за пределами N_2 .

Формулы (2) – (5) и графики (рисунок 3) справедливы для случаев, когда эксплуатационные показатели оборудования – количество выпущенной продукции $Q_{гi}$ и эксплуатационные затраты $(T_v + T_{ж})_i$ являются неизменными во времени и от длительности эксплуатации не зависят. В общем случае это не всегда справедливо, потому что в процессе эксплуатации всегда действуют необратимые факторы: с одной стороны, освоения, отработки технологии, повышения квалификации обслуживающего персонала, с другой – старения оборудования вследствие износа, потери жесткости и геометрической точности узлов, накопления усталостных напряжений и т.д.

На рисунке 4 /3/ приведены графики зависимости общественного труда при эксплуатации токарно-револьверных автоматов от сроков службы при переменных эксплуатационных показателях. Как видно, при данном характере изменения $Q_{г}$ и $(T_v + T_{ж})$ во времени зависимость $A_T = f(N)$ имеет не асимптотический, а экстремальный характер (ломаная линия 2).

Учет переменного характера W и T необходим при решении ряда практических задач проектирования и эксплуатации оборудования, например, расчете оптимальных сроков службы (согласно рисунку 4, $N_{опт.} = 11 - 13$ лет). В остальных случаях, особенно при анализе путей и перспектив развития технического прогресса и автоматизации производственных процессов, целесообразно принимать $Q_{г} = \text{const}$ и $(T_m + T_{ж}) = \text{const}$ и использовать уравнения (2) и (5).



1 – при постоянных эксплуатационных показателях; 2 – при переменных во времени эксплуатационных показателях

Рисунок 4 - Производительность труда в зависимости от сроков службы

Преобразуем формулу (5) производительности труда. Принимая живой труд мерой (масштабом) оценки прошлого труда, эти затраты можно выразить в единицах живого труда, вводя коэффициенты k и m :

$$k = T_{\text{п}}/T_{\text{ж}}, \quad k = T_{\text{м}}/T_{\text{ж}}, \quad (7)$$

где k – коэффициент технической вооруженности живого труда, характеризующий отношение единовременных затрат овеществленного труда на создание средств производства $T_{\text{п}}$ к годовым затратам живого труда; m – коэффициент энергоматериалоемкости живого труда, характеризующий отношение годовых текущих затрат $T_{\text{в}}$ овеществленного труда на инструмент, электроэнергию, вспомогательные материалы и ремонт к годовым затратам живого труда.

Так, если один рабочий обслуживает оборудование ($T_{\text{ж}} = 1$), в действительности он работает не один. Чтобы выпускать продукцию в течение года $Q_{\text{г}}$, используется концентрированный труд k человек, из которого затрачивается в год k/N человек (прошлого труда). При этом еще m человек обеспечивают этого одного рабочего всем необходимым

(материалами, инструментами, электроэнергией и пр.), без чего производство невозможно.

Число условно работающих за год составляет $k/N + m + 1$ человек; а за весь срок службы объекта $k + N(m + 1)$ человек.

Следовательно,

$$T = T_{\text{ж}}[k + N(m + 1)]. \quad (8)$$

Таким образом, суммарные затраты общественного труда в $k + N(m + 1)$ раз больше затрат живого труда.

Подставляя значение T из формулы (8) в зависимость (5), получаем

$$A_T = \frac{NQ_{\text{г}}}{[k + N(m + 1)] T_{\text{ж}}} = \frac{Q_{\text{г}}}{T_{\text{ж}}} \frac{N}{k + N(m + 1)}. \quad (9)$$

Уровень производительности труда можно определять с учетом различных масштабов производства.

Если оценивать производительность труда в определенной отрасли, то в текущие эксплуатационные затраты необходимо включать наряду с инструментом, электроэнергией стоимость сырья, заготовок и так далее. Стоимость материалов включает в себя затраты на живой и прошлый труд на всех предыдущих операциях, начиная с добывающей промышленности и металлургии. Поэтому в данном случае производительность труда оценивается при обработке изделия в целом.

Если необходимо оценить уровень производительности труда на данной операции обработки, а следовательно, прогрессивность технологии, то в текущих эксплуатационных затратах необходимо учитывать лишь издержки эксплуатации оборудования (инструмент, электроэнергия, ремонт станка и так далее).

Таким образом, в зависимости от масштабов оценки производительности общественного труда числовая величина m в формуле может быть различной.

Возникает также задача определения уровня производительности труда на определенном рабочем месте, производительности труда обслуживающего

персонала. В этом случае затраты прошлого труда не учитываются и $k = 0$, $m = 0$.

В результате

$$A = Q_{\Gamma} / T_{\text{ж}} \bullet N/N = Q_{\Gamma} / T_{\text{ж}} = A_{\text{ж}} . \quad (10)$$

Полученная величина представляет собой уже производительность не общественного, а живого труда, т.е. выработку на одного производственного рабочего. Недостаточность этой характеристики, не отражающей труд, затраченный на создание средств производства и на обеспечение их работоспособности, совершенно очевидна.

Чем выше степень технической оснащенности (выше k и m), степень автоматизации производства, тем меньше рабочих занято непосредственно у оборудования и тем большее количество их находится «за ширмой», незримо, то есть увеличивается доля прошлого труда. В этом заключается историческая тенденция развития техники в любой отрасли производства.

Для оценки прогрессивности новой техники необходимо по уровню производительности труда сравнить различные варианты. Затем сравнить внедряемый вариант с действующим в производстве (базовым вариантом) и дать заключение о целесообразности его внедрения.

Предпочтение следует отдать варианту, который обеспечивает наибольший рост производительности труда и гарантирует выполнение планируемых темпов ее роста на весь срок службы оборудования

$$\lambda = A_{\text{T}2}/A_{\text{T}1} , \quad (11)$$

где λ - коэффициент роста производительности труда при сравнении двух технических вариантов; $A_{\text{T}1}$ производительность труда, которую обеспечивает исходный вариант техники; $A_{\text{T}2}$ – производительность труда второго, сравниваемого с исходным, варианта техники.

Сравнение различных вариантов техники позволяет определить их прогрессивность. Например, если существующая техника обеспечивает производительность труда $A_{\text{T}1} = 25$ шт./чел-ч, а новая техника $A_{\text{T}2} = 100$ шт./чел-ч, то

$$\lambda = A_{T2}/A_{T1} = 100/25 = 4, \quad (12)$$

т.е. внедрение новой техники обеспечивает рост производительности труда в четыре раза.

Производительность труда исходного варианта

$$A_{T1} = NQ_1/[k + N(m + 1)]T_{ж1} . \quad (13)$$

Если оба сравниваемых варианта вводятся в действие одновременно, то производительность труда второго варианта

$$A_{T2} = NQ_2/[k_2 + N(m_2 + 1)]T_{ж2} . \quad (14)$$

Рост производительности труда

$$\lambda = \frac{NQ_2/[k + N(m + 1)]T_{ж1}}{NQ_1/[k_2 + N(m_2 + 1)]T_{ж2}} = \frac{Q_2}{Q_1} \frac{T_{ж1}}{T_{ж2}} \frac{[k + N(m + 1)]}{[k_2 + N(m_2 + 1)]} . \quad (15)$$

Введем безразмерные коэффициенты, характеризующие сравнительные технико-экономические показатели обоих вариантов производства: $\varphi = Q_2/Q_1$ – коэффициент роста производительности средств производства, показывающий, во сколько раз повышается производительность при втором варианте по сравнению с исходным; $\varepsilon = T_{ж1}/T_{ж2}$ – коэффициент сокращения живого труда, показывающий, во сколько раз сокращается живой труд при втором варианте по сравнению с исходным; $\sigma = T_{п2}/T_{п1}$ – коэффициент изменения стоимости средств производства; δ – коэффициент изменения текущих эксплуатационных затрат на единицу продукции. Отношение годовых текущих затрат описывается формулой

$$T_{v2}/T_{v1} = \varphi\delta. \quad (16)$$

Величина текущих эксплуатационных расходов (инструмент, электроэнергия, вспомогательные материалы и др.) обычно пропорциональна выпуску продукции. Поэтому в формуле (16) коэффициент φ отражает изменение масштабов производства, а коэффициент δ – изменение текущих эксплуатационных затрат на единицу изделия.

Определим величины k_2 и m_2 через безразмерные коэффициенты:

$$k_2 = \frac{T_{п2}}{T_{ж2}} \frac{T_{п1}\sigma}{T_{ж1}/\varepsilon} = \frac{T_{п1}}{T_{ж1}} \sigma\varepsilon = k\sigma\varepsilon;$$

$$m_2 = \frac{T_{v2} - T_{v1}\varphi\delta - T_{v1}}{T_{ж2} - T_{ж1}/\varepsilon - T_{ж1}} \varphi\delta\varepsilon = m\delta\varphi\varepsilon. \quad (17)$$

Подставляя значения k_2 и m_2 , а также φ и ε в формулу (15), получаем выражение, в котором рост производительности труда найден непосредственно через сравнительные технико-экономические показатели обоих вариантов производства

$$\lambda = \varphi\varepsilon \frac{k + N(m + 1)}{k\sigma\varepsilon + N(m\delta\varphi\varepsilon + 1)}. \quad (18)$$

Проанализируем полученную зависимость графически.

На рисунке 5 приведены графики изменения производительности труда во времени для двух проектируемых вариантов новой техники, например, поточной и автоматической линий при условии, что оба варианта вводятся в действие одновременно и имеют одинаковые сроки службы.

Так как автоматическая линия более дорогая, чем поточная ($\sigma > 1$), то при малых сроках службы производительность общественного труда на поточной линии A_1 выше, чем на автоматической A_2 , поэтому и коэффициент роста производительности труда меньше единицы. Однако автоматическая линия благодаря высокой производительности ($\varphi > 1$) и малому количеству обслуживающего персонала ($\varepsilon > 1$) имеет более низкие эксплуатационные затраты при выпуске продукции, поэтому при длительных сроках службы уровень производительности труда на автоматической линии выше ($\lambda > 1$). Следовательно, если сроки службы автоматической линии меньше некоторой минимальной величины ($N < N_m$), целесообразнее строить поточную линию как более дешевую, несмотря на большие эксплуатационные расходы. И наоборот, автоматическая линия выгоднее, если предполагаемые сроки ее службы достаточно велики ($N > N_m$).

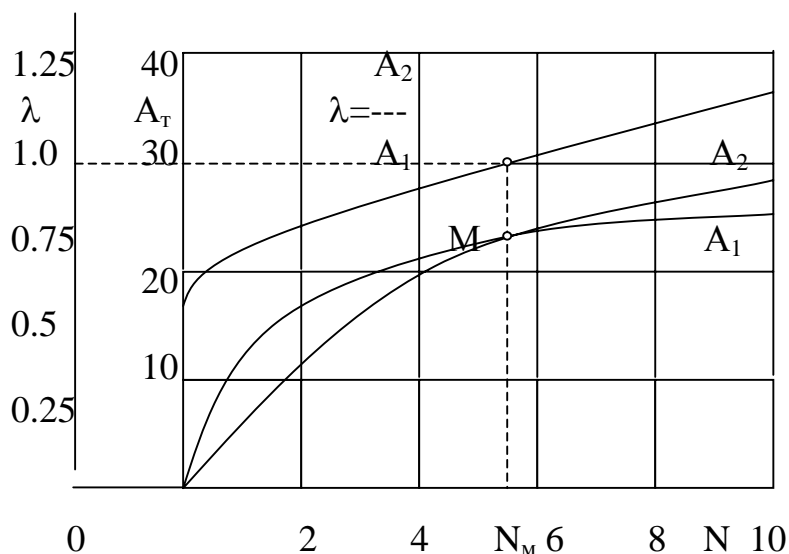


Рисунок 5 - Рост производительности труда во времени при сравнении вариантов новой техники с одновременным вводом в эксплуатацию

Нетрудно видеть, что в формуле (17) произведение $\phi\epsilon$ представляет собой рост производительности живого труда:

$$\lambda_{\text{ж}} = \phi\epsilon. \quad (19)$$

Здесь ϕ характеризует увеличение производительности труда обслуживающего персонала за счет роста производительности средств производства, а ϵ - увеличение производительности труда за счет увеличения числа станков, обслуживаемых одним рабочим. Поэтому формула (18) получает вид

$$\lambda = \lambda_{\text{ж}} \frac{k + N(m + 1)}{k\sigma\epsilon + N(m\delta\phi\epsilon + 1)}. \quad (20)$$

Следовательно, рост производительности труда равен произведению роста производительности живого труда, т.е. зримого достигнутого результата, на коэффициент, показывающий, какими затратами прошлого труда достигнуто это увеличение. Разделив числитель и знаменатель в формуле (18) на ϵ , получим

$$\lambda = \phi \frac{k + N(m + 1)}{\sigma + N(m\delta\phi + 1)}. \quad (21)$$

$$k\sigma + N(m\delta\varphi + 1/\varepsilon)$$

Характерным для современного этапа развития техники, в первую очередь для автоматизации производственных процессов, является рост производительности средств производства ($\varphi > 1$), увеличение их стоимости ($\sigma > 1$) и сокращение числа людей, непосредственно занятых обслуживанием оборудования ($\varepsilon > 1$). Изменение текущих затрат прошлого труда на единицу изделия зависит от характера производственного процесса и может находиться в широких пределах.

Выбор наиболее выгодного варианта новой техники, как показано выше (см. рисунок 5), зависит не только от сравнительных технико-экономических показателей (производительность, стоимость, количество обслуживающего персонала и т.д.), но и от сроков эксплуатации новой техники, а также сроков ее проектирования и освоения. На практике сроки проектирования и освоения различных вариантов новой техники зачастую отличаются друг от друга, поэтому и сроки их ввода в эксплуатацию различны.

Например, на проектирование, изготовление и отладку автоматической линии уходит больше времени, чем на компоновку поточной линии из универсальных автоматов и полуавтоматов. Предположим, что такая автоматическая линия может быть введена в эксплуатацию на L лет позже, чем поточная; следовательно, срок ее службы $(N-L)$ лет. Тогда производительность труда при эксплуатации автоматической линии

$$A_{T2} = \frac{Q_2 \quad N - L}{T_{ж2} k + (N - L)(m_2 + 1)}. \quad (22)$$

Сравнивая производительность труда обоих вариантов новой техники в этом случае, получим

$$\lambda = \varphi \frac{N - L \quad k + N(m + 1)}{N \quad k\sigma + (N - L)(m\delta\varphi + 1/\varepsilon)}. \quad (23)$$

Таким образом, теория производительности труда позволяет проводить сравнительный анализ различных предлагаемых вариантов новой техники по

главному критерию – росту производительности труда с учетом фактора времени – сроков проектирования и освоения.

Для того, чтобы определить прогрессивность и перспективность любого варианта новой техники, необходимо сравнить его по уровню производительности труда не только с другими технически возможными вариантами, но и с существующим производством, с той техникой, которая должна быть заменена.

Оборудование, которое внедрено и уже работает на протяжении R лет, к моменту времени $N = 0$ обеспечило уровень производительности труда A_{T0} :

$$A_{T0} = \frac{Q_T}{T_{ж}} \frac{R}{k + R(m + 1)} = \frac{A_{Tж}}{k/R + m + 1}. \quad (24)$$

Если данное оборудование является характерным для отрасли, то оно определяет средний уровень производительности общественного труда, достигнутый к настоящему времени.

Как правило, технический уровень и стоимость заменяемого оборудования невысоки, а сроки службы R достаточно продолжительны, поэтому для упрощения расчетов можно с малой погрешностью принимать $k/R = 0$. Тогда формула (24) упрощается и имеет вид

$$A_{T0} = \frac{Q_T}{T_{ж}} \frac{1}{m + 1}. \quad (25)$$

Рост производительности общественного труда при сравнении новой техники с действующим оборудованием, которое определяет достигнутый уровень производительности труда

$$\lambda = \frac{A_{T2}}{A_{T0}}; \quad A_{T2} = \frac{Q_{T2}}{T_{ж2}} \frac{1}{k_2/N + m_2 + 1}. \quad (26)$$

Подставив в (26) значения A_{T2} и A_{T0} и проведя преобразования, получим

$$\lambda = \frac{\phi \epsilon (m + 1)}{k \sigma \epsilon / N + m \delta \phi \epsilon + 1} \quad (27)$$

или, разделив числитель и знаменатель на ϵ ,

$$\lambda = \frac{\varphi(m+1)}{k\sigma/N + m\delta\varphi + 1/\varepsilon}. \quad (28)$$

В противоположность предыдущему случаю, когда производительность труда определялась из сравнения двух вариантов новой техники, которые только вводятся в эксплуатацию, здесь существующая техника за R лет достигла определенного вполне конкретного уровня производительности труда $A_{т0}$, с которым должны сравниваться любые варианты новой техники.

На рисунке 6 показана диаграмма роста производительности труда во времени для различных вариантов производства при условии, что все взаимозаменяемые варианты, как новые, так и действующие, имеют сроки службы еще N лет.

Кривая λ_1 характеризует рост производительности труда лучшей существующей техники по сравнению со средним уровнем производства в настоящее время. Как видно, лучшая существующая техника обеспечивает более высокий уровень производительности труда, однако с удлинением сроков службы темпы роста постепенно замедляются. Не остается неизменной и производительность труда того варианта техники, который характеризует средний уровень производства $A_{т0}$, если это оборудование эксплуатируется еще N лет дополнительно к R годам (кривая λ_0).

Кривая λ_2 (рисунок 6) показывает рост производительности труда новой

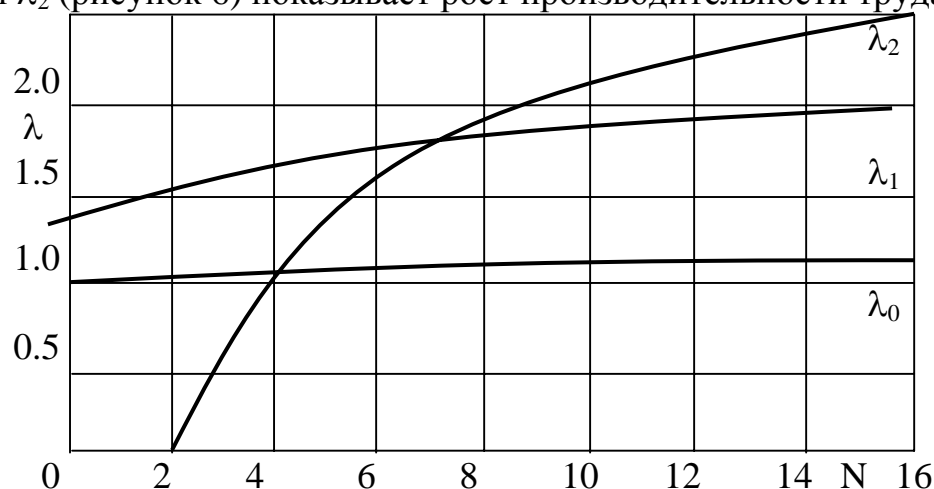


Рисунок 6 - Рост производительности труда при сравнении действующего оборудования и новой техники

техники, которая будет внедрена через 2 года. При малых сроках службы эта производительность труда ниже, чем лучшей существующей техники и даже техники среднего уровня в настоящее время, однако при достаточно длительных сроках службы новая техника реализует свои возможности и обеспечивает значительные темпы роста производительности труда.

Как видно, при увеличении сроков службы производительность труда любого варианта производства, постепенно повышаясь, стремится к определенному пределу λ_{\max} . Величина λ_{\max} определяется технико-экономическими показателями новой техники: ростом производительности, сокращением количества обслуживающих рабочих, экономичностью оборудования в эксплуатации. Если новая техника имеет низкий потенциал роста производительности труда, она не может быть прогрессивной.

4 Направления автоматизации

Автоматизация связана с улучшением тех или иных технических характеристик, что сопровождается ростом производительности труда. Однако улучшение различных технико-экономических показателей оказывает неодинаковое влияние на производительность общественного труда. Количественный анализ формул, определяющих производительность труда, позволяет указать следующие основные направления повышения производительности труда при автоматизации производственных процессов.

Первое направление – уменьшение затрат живого труда $T_{\text{ж}}$ за счет сокращения обслуживающего персонала, непосредственно занятого в процессе производства. Оно достигается благодаря совершенствованию средств производства и управления, изменению организации труда и т.д., когда один оператор получает возможность обслуживать одновременно несколько машин или благодаря внедрению вычислительной техники и иных современных средств выполнять работу, которую раньше выполняли при обслуживании системы ε человек.

Такое направление автоматизации имеет ограниченные возможности повышения производительности труда, так как при сохранении данного уровня производительности оборудования экономия живого труда имеет тенденцию к убыванию, что можно иллюстрировать следующим расчетом.

Как известно, при обслуживании неавтоматизированного оборудования оператор осуществляет ручную управление последовательностью обработки и выполняет все вспомогательные операции (установку и съем заготовок, зажим и разжим их в шпинделе, подвод и отвод инструментов, контроль размеров обрабатываемых изделий, а также передачу заготовок от станка к станку, уборку стружки, переключение режимов обработки и т.д.). Естественно, что в условиях неавтоматизированного производства оператор обслуживает, как правило, лишь один станок ($Z = 1$).

Предположим, что имеется участок из Z станков, которые обслуживают Z операторов. При автоматизации затраты живого труда в процессе обработки уменьшаются тем больше, чем выше степень автоматизации оборудования, когда один оператор получает возможность обслуживать не один, а большее количество станков ($Z > 1$). Если в поточной линии общие затраты живого труда при $Z = 1$ составляли $T_{\text{ж}}$, то при обслуживании оператором Z станков и неизменной зарплате одного рабочего они составляют $T_{\text{ж}}/Z$. Следовательно экономия живого труда операторов

$$\Xi = T_{\text{ж}} - T_{\text{ж}}/Z = T_{\text{ж}}(1 - 1/Z). \quad (29)$$

Если относить экономию к первоначальному фонду зарплаты, то

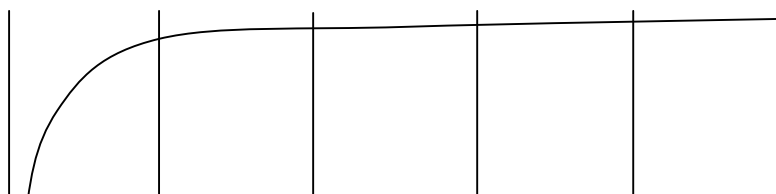
$$\Delta = \Xi/T_{\text{ж}} = 1 - 1/Z. \quad (30)$$

Автоматизация рабочего цикла машины, создание автоматов и полуавтоматов, оснащенных автоматической системой управления рабочими и холостыми ходами, позволяет ограничить обязанности операторов сменой заготовок (на полуавтоматах), заправкой материала в механизмы, межстаночной транспортировкой. Это дает возможность одному оператору обслуживать не один, а два-три станка и, следовательно, сократить количество обслуживающих операторов и получить экономию зарплаты. Так

при обслуживании одним оператором двух станков ($Z = 2$) экономия уже составляет 50% зарплаты обслуживающего персонала ($\Theta/T_{ж1} = 0.5$; рисунок 7).

Таким образом, автоматизация рабочего цикла станков (первая ступень автоматизации), которая достигается иногда простейшими техническими средствами и с минимальными затратами, позволяет сэкономить значительную часть трудовых затрат, необходимых в условиях неавтоматизированного производства. Путем дальнейшего усовершенствования (оснащения полуавтоматов механизмами автоматической загрузки, контроля, улучшением системы эксплуатации и т.д.) можно достигнуть того, что один оператор будет обслуживать в поточной линии $Z = 4 - 5$ станков, и экономия трудовых затрат и заработной платы увеличится еще больше, однако, как показывает рисунок 7, эта экономия не будет пропорциональна количеству станков, обслуживаемых одним оператором. Если увеличение Z в два раза (от 1 до 2) позволяет сэкономить 50 % фонда зарплаты, то увеличение Z в 2.5 раза (от 2 до 5) дает возможность сэкономить только 40 %.

Дальнейшая экономия затрат живого труда возможна только путем создания автоматических линий, т.е. автоматизацией межстаночной транспортировки заготовок и накопления заделов, созданием новых систем управления, сигнализации и блокировки, механизмов автоматического контроля и подналадки, уборки стружки и т.д. При этом, если технологические процессы остаются прежними, то и производительность оборудования сохраняется на достигнутом уровне, а автоматизация позволяет лишь увеличить число станков, обслуживаемых одним оператором. Если при переходе от обслуживания одной машины к двум можно простейшими средствами сэкономить 50 % зарплаты, то при переходе от 50 к 100 станкам только 1 %.



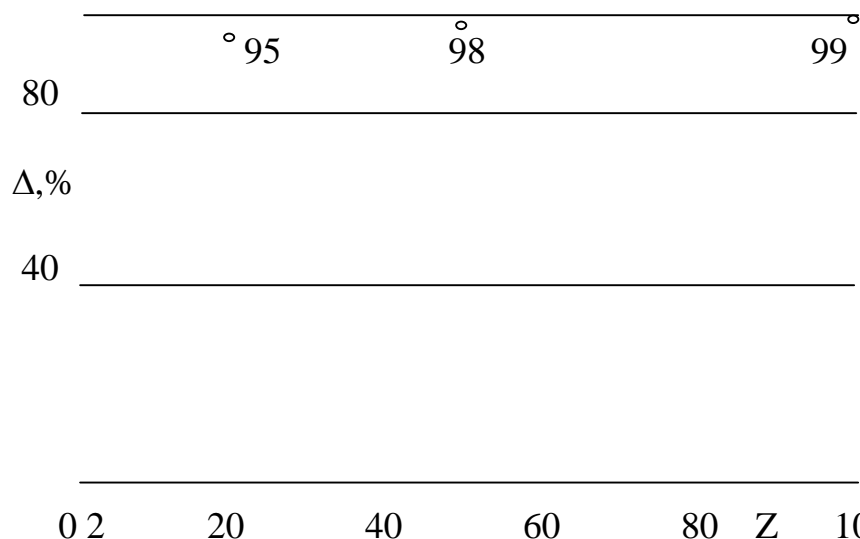


Рисунок 7 - Зависимость экономии живого труда от количества станков, обслуживаемых одним рабочим

Однако создание автоматических систем из 50 или из 100 станков, которые обслуживаются одним оператором, требует решения целого ряда сложнейших технических проблем с использованием всех новейших технических средств автоматизации с огромными затратами сил, средств и времени. Таким образом, с увеличением степени автоматизации системы машин технические трудности и затраты прогрессивно растут, а экономия трудовых затрат снижается. Следует отметить при этом, что $\epsilon < Z$, потому что автоматизация приводит к уменьшению количества рабочих операторов, но не наладчиков, численность которых, как правило, возрастает, особенно при низких показателях надежности оборудования. Автоматизация с целью сокращения затрат ручного труда может быть эффективной прежде всего в отраслях с низкой технической оснащенностью (малым значением k), где еще велики затраты живого труда, а следовательно, и резервы экономии этих затрат. Создание автоматических линий на базе существующего поточного производства, где один оператор и без автоматизации обслуживает два-три станка, если эти линии опираются на существующие технологические процессы и имеют целью только сокращение числа рабочих-операторов и подсобных рабочих - малоэффективно.

Таким образом, автоматизация с целью многостаночного обслуживания выгодна и позволяет создавать автоматические системы машин в кратчайшие

сроки лишь в тех случаях, когда она не требует больших дополнительных затрат сил, средств и времени, благодаря применению унифицированных средств автоматики.

Второе направление повышения производительности труда – сокращение затрат прошлого труда за счет снижения стоимости средств производства (уменьшения $\sigma < 1$). Этот путь связан с совершенствованием технологии производства самих средств производства, стандартизацией и унификацией механизмов, узлов и деталей машин, обеспечивающих снижение их себестоимости. Для этого пути характерно развитие агрегатно-модульного принципа конструирования, поточных методов производства новых машин, а также унифицированных средств автоматизации. Важнейшей задачей является создание универсальных встраиваемых станков, пригодных как для самостоятельной эксплуатации, так и для встраивания в автоматические линии. Такие станки в большом количестве могут использоваться в автоматических линиях различного технологического назначения, что позволяет наладить их выпуск в больших масштабах, применяя поточные методы производства, создавая стабильные конструкции, надежные в эксплуатации.

Унификация и стандартизация оборудования позволяет не только уменьшить его стоимость, но значительно сократить сроки проектирования и освоения и тем самым повысить производительность общественного труда.

Оценивая перспективность второго пути повышения производительности труда, следует учитывать неодинаковые реальные возможности улучшения характеристик ε и σ . Если новые автоматические линии, оснащенные современными средствами автоматики, позволяют сократить число обслуживающих операторов в несколько раз ($\varepsilon = 3 - 5$), то сократить стоимость новой техники во столько же раз практически невозможно. Проектирование, изготовление, монтаж и отладка новых машин являются сложными процессами; каждый процент снижения заводской себестоимости новой машины является достижением. Как показывает опыт,

максимальное снижение, которое можно достигнуть, составляет 30 %, то есть $\sigma = 0.7$.

Третий путь повышения производительности труда – сокращение затрат живого и прошлого труда за счет повышения производительности средств производства, а следовательно, сокращения трудовых затрат на единицу изделия (увеличение $\varphi > 1$). Это достигается путем разработки новых прогрессивных технологических процессов и создания высокопроизводительных средств производства.

На рисунке 8 приведены построенные по формуле (28) графики зависимости производительности труда λ от роста производительности средств производства φ и степени сокращения живого труда ε . Кривая 1 показывает рост производительности труда в результате агрегирования машин в автоматическую систему при неизменном уровне производительности машин ($\varphi = 1$) и без учета затрат на автоматизацию ($\sigma = 1$). При такой автоматизации единственным источником экономии является сокращение требуемого фонда зарплаты производственных рабочих. Кривая 1' построена с учетом неизбежного прогрессивного роста стоимости таких автоматических линий и некоторого снижения их производительности ($\varphi < 1$, $\sigma > 1$) в результате агрегирования все большего количества машин в автоматическую систему. В итоге производительность общественного труда на сложных, технически совершенных автоматических линиях, оснащенных всем арсеналом средств современной автоматики, электроники и т.д. может оказаться ниже, чем на поточных линиях. Заштрихованная область означает потери производительности труда из-за указанных факторов, которые особенно значительны для автоматических линий сложной конструкции.

Кривые 2 и 2' показывают рост производительности труда при автоматизации, сочетающей рост производительности оборудования ($\varphi > 1$) и сокращение затрат живого труда ($\varepsilon > 1$). Как видно, и здесь существуют потери производительности труда по тем же причинам, однако потенциал

роста производительности труда настолько высок, что автоматизация является эффективной.

Как показывают графики (рисунок 8), рост производительности труда при увеличении сроков службы N стремится к некоторому пределу λ_{\max} :

$$\lambda_{\max} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \varepsilon \frac{k + N(m + 1)}{k \sigma \varepsilon + N(m \delta \varphi \varepsilon + 1)} = \frac{\varphi \varepsilon (m + 1)}{m \delta \varphi \varepsilon + 1} \quad (31).$$

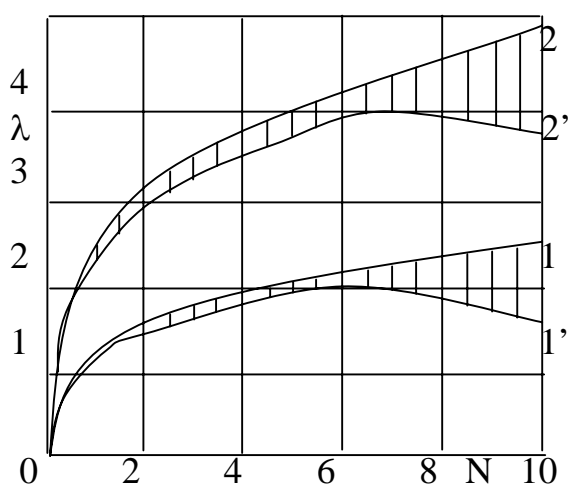


Рисунок 8 - Рост производительности труда при автоматизации при сокращении количества обслуживающих рабочих ε и повышению производительности оборудования

Как видно, максимальный уровень повышения производительности труда при внедрении новой техники зависит только от сравнительных технико-экономических показателей работы оборудования (φ , ε , δ) и не зависит от ее стоимости, сроков ввода в эксплуатацию и т.д.

Если эти показатели новой техники оказываются низкими, то новая техника не может быть прогрессивной. Таким образом, генеральным направлением «жесткой» автоматизации является разработка новых прогрессивных технологических процессов и создание таких высокопроизводительных средств производства, которые вообще невозможны, пока человек остается непосредственным участником выполнения технологического процесса.

Вопрос можно поставить и по-другому: начиная с какой производительности оборудования автоматизация становится эффективной?

Рассмотрим математическую модель такого расчета. Базовый вариант производства, например поточная линия, имеет характеристики: стоимость K (руб.), годовой фонд зарплаты обслуживающего персонала $З$ (руб.), годовые затраты на инструмент, электроэнергию, вспомогательные материалы и так далее – m (руб.), годовой выпуск продукции (производительность) Q_z . Остальные показатели стоимости являются зависимыми от основных. Так, годовые амортизационные отчисления составляют $K\alpha_1$, где α_1 – нормативный коэффициент амортизации; годовые затраты на текущий ремонт и межремонтное обслуживание также в первом приближении можно принять пропорциональными стоимости с коэффициентом α_2 ($K\alpha_2$ за год).

Тогда себестоимость годового выпуска продукции при базовом варианте

$$C_1 = K(\alpha_1 + \alpha_2) + m + З. \quad (32)$$

Числовые значения этих показателей можно определить с достаточной степенью достоверности, если такая система спроектирована и функционирует.

Второй, сравниваемый вариант производства, является искомым. Его характеристики должны быть определены в процессе расчета, исходя из обеспечения гарантированного экономического эффекта через сравнительные технико-экономические показатели (φ , σ , ε , δ), которые на данном этапе выступают в качестве варьируемых величин.

Стоимость искомого варианта согласно приведенным выше категориям в σ раз выше – $K\sigma$ руб.

Количество обслуживающего персонала в ε раз меньше, следовательно, фонд зарплаты за год $З/\varepsilon$ руб.

Производительность (в шт.) в φ раз выше и составляет в год $Q_z\varphi$. Годовые затраты на эксплуатацию (ремонт и обслуживание, инструмент и электроэнергия, вспомогательные материалы и др.) принимаем по общей

формуле (17) пропорциональными выпуску продукции и степени экономичности работы оборудования ($m_2 = m\delta\varphi$), что допустимо при теоретических исследованиях развития технического прогресса, направлений и перспектив автоматизации.

В прикладных расчетах при сравнении конкретных конструкций и компоновок машин такое допущение является неправомерным. Более правильно затраты на ремонт и обслуживание принимать пропорциональными увеличению стоимости σ , а затраты на инструмент, электроэнергию и др. – пропорциональными выпуску φ с учетом экономичности новых технологических процессов. Тогда годовые эксплуатационные затраты при искомом варианте

$$C_2 = K\sigma\alpha_1 + K\sigma\alpha_2 + m\delta\varphi + 3/\varepsilon. \quad (33)$$

Для сравнения обоих вариантов по любому критерию экономической эффективности, например, минимуму приведенных затрат, необходимо привести оба варианта к сопоставимому масштабу выпуска изделий, т.е. увеличить все затраты базового варианта в φ раз.

Тогда приведенные затраты по базовому варианту

$$C_{n1} = \varphi(KE_n + C_1) = \varphi[K(E_n + \alpha_1 + \alpha_2) + m + 3]. \quad (34)$$

где E_n – нормативный коэффициент экономической эффективности капиталовложений.

Приведенные затраты по искомому проектируемому варианту

$$C_{n2} = KE_n + C_2 = K\sigma(E_n + \alpha_1 + \alpha_2) + m\delta\varphi + 3/\varepsilon. \quad (35)$$

Годовой экономический эффект определяется как разность приведенных затрат

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = C_{n1} - C_{n2} = \varphi[K(E_n + \alpha_1 + \alpha_2) + m + 3] - [K\sigma(E_n + \alpha_1 + \alpha_2) + m\delta\varphi + 3/\varepsilon] = \\ = K(\varphi - \sigma)(E_n + \alpha_1 + \alpha_2) + m\varphi(1 - \delta) + 3(\varphi - 1/\varepsilon). \end{aligned} \quad (36)$$

Очевидно, чем выше рост производительности оборудования при проектируемом варианте производства по сравнению с базовым φ , тем выше годовой экономический эффект \mathcal{E} , и наоборот. Как известно, предельным допустимым случаем является равенство годового экономического эффекта

нулю ($\mathcal{E} = 0$). Отсюда можно определить минимально допустимое, требуемое значение повышения производительности $\varphi = \varphi_{min}$, обеспечивающее минимально допустимый экономический эффект, ($\mathcal{E} = 0$). Приравняв в формуле (36) $\mathcal{E} = 0$ и решая уравнение относительно φ , получаем

$$\varphi_{min} = \frac{K\sigma(E_n + \alpha_1 + \alpha_2) + 3/\varepsilon}{K(E_n + \alpha_1 + \alpha_2) + m(1 - \delta) + 3}. \quad (37)$$

Однако, данная теория справедлива лишь для так называемой “жесткой” автоматизации и для реализации только экономически обоснованных систем автоматизации.

5 Компьютерно-интегрированное производство

В настоящее время компьютер становится главным средством автоматизации. Его возрастающие возможности по охвату всего производственного процесса в целом позволяют говорить о компьютерно-интегрированном производстве (СІМ – computer integrated manufactory). При этом в качестве объекта, на который нацелено производство, можно рассматривать рынок, как изображено на рисунке 9.

Из схемы видно, что компьютерно-интегрированное производство следит за состоянием рынка (цены на разные виды продукции) и за действующими на него возмущениями (колебание курса валюты, изменение вкусов потребителей, технический прогресс), быстро перестраивает производство на выпуск товаров в ассортименте и стоимости, приносящих наибольшую прибыль предприятию.

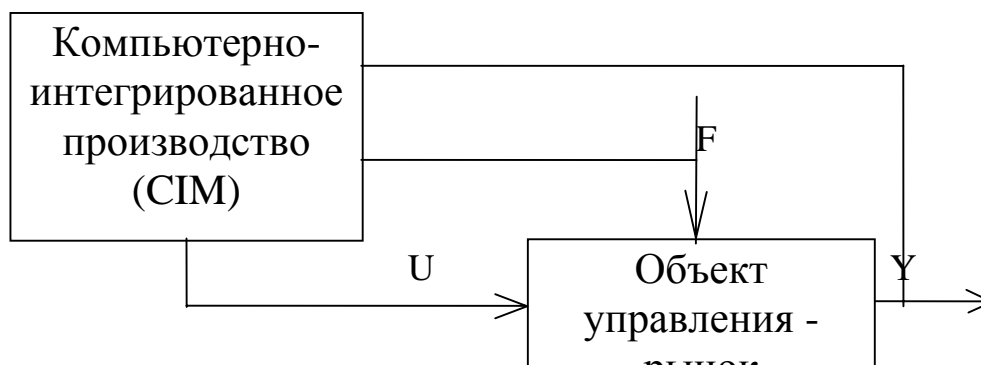


Рисунок 9 - Схема взаимодействия СИМ с рынком

При этом само компьютерно-интегрированное производство является многоуровневым, как показано на рисунке 10.

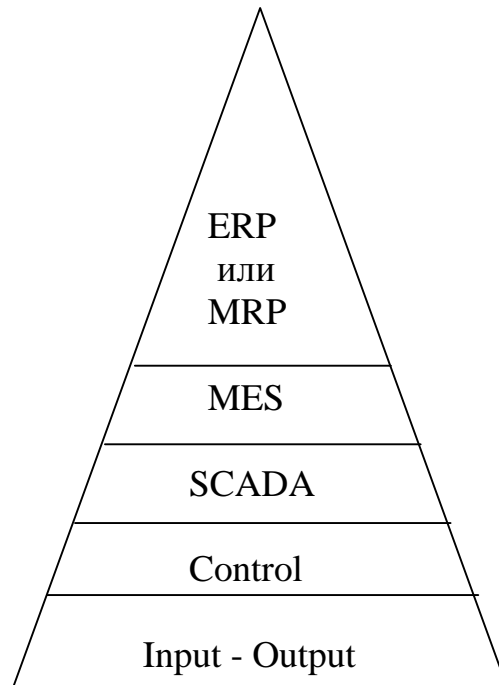


Рисунок 10 - Иерархия уровней автоматизации

Здесь самый нижний уровень занимают подсистемы ввода – вывода, над ними находится уровень локальных систем автоматики. Далее следует SCADA – уровень (supervisory control and data aquisition – супервизорное управление и получение данных), управляющий технологическим процессом в целом. На самом верху пирамиды находится система MRP (manufactory resource planning – планирование производственных ресурсов) или ERP (enterprice resource planning – планирование ресурсов предприятия). Между SCADA уровнем и самым верхним уровнем находится MES уровень (manufacture execute system – производственная исполнительная система), который играет роль фильтра при поступлении информации о ходе производственного процесса снизу вверх (обобщает потребности производства в сырье, материалах, оборудовании, инструменте и кадрах для дальнейшего планирования), а при движении сверху вниз является

исполнительным уровнем (оптимально распределяет ресурсы управления по технологическим процессам).

Структуру компьютерно-интегрированного производства наглядней представить в виде человеческой фигуры - рисунок 11. Здесь в основе лежит цифровое управление (NC – numeric control). Над этой основой возвышаются гибкие производственные системы (FMS – flexible manufacture system). Цен-

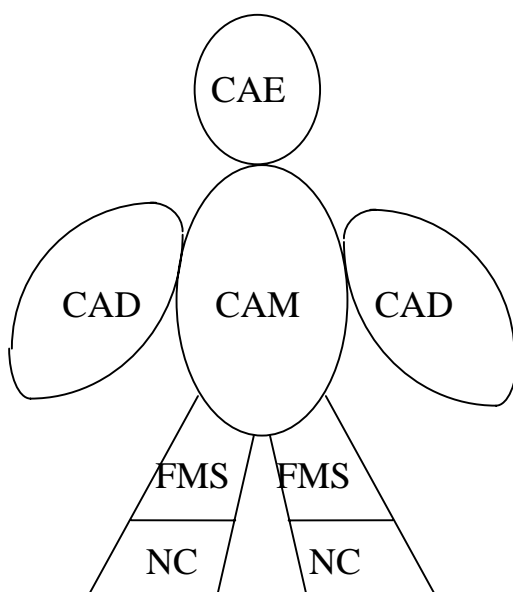


Рисунок 11 - Структура CIM

тром является гибкое автоматизированное производство (CAM – computer added manufactory), в качестве рук фигурируют системы автоматизированного проектирования (CAD - computer added design), а головой всему является автоматизация инженерного труда (CAE - computer added engineering).

В условиях рыночной экономики самым главным экономическим показателем становится конкурентоспособность предприятия и продукции. Последняя зависит от прибыли, получаемой от продажи своей продукции. Прибыль же, в свою очередь, является функцией производительности (П) производства, качества (К) выпускаемой продукции, затрат (З) на производство продукции и степени учета побочных эффектов (Эк) - экологии, юридических аспектов, местных условий и так далее

$$\mathcal{E} = f(\Pi, K, Z, \mathcal{E}k). \quad (38)$$

Попробуем конкретизировать данную формулу. Поскольку любая автоматизация связана с затратами, необходимо, чтобы эффект от использования её результатов был максимален и быстро оправдывал вложенные средства. Поэтому логично положить в основу синтеза отношение эффекта от автоматизации, измеренного в каких-либо единицах, к затратам, связанным с ней

$$\eta = \frac{\mathcal{E}}{Z} \quad (39)$$

и стремиться при проектировании системы автоматизации довести это отношение до максимума.

Затраты могут быть денежными, материальными, временными, машинными (например, затраты памяти компьютера) и т. д., а также комплексными. При этом существует несколько видов эффекта от автоматизации: экономический, социальный или качественный.

Выделяют три классических обоснования целесообразности автоматизации (именно с обоснования целесообразности и начинается автоматизация).

С одной стороны, автоматизация оправдана только тогда, когда она приносит прямой экономический эффект - повышает производительность труда, качество изготавливаемой продукции, снижает её себестоимость и т. д. Тогда эффект оценивается в рублях.

С другой стороны, автоматизация может иметь социальный эффект: освобождать человека от вредных и опасных условий труда, устранять монотонную нетворческую работу и т. д. В этом случае необходим поиск критериев для сравнения эффективности систем автоматизации.

Наконец, автоматизация помогает преодолевать ограниченные природой возможности человека, т. е. приносить ему новые качества - многократно увеличивать его физическую силу, зрение, слух, интеллект и т. д. Эффект от нового качества, которое порождает автоматизация, требует меры для сравнения важности качеств. В этом случае оценка эффекта особенно трудна

и в значительной степени обусловлена личными интересами человека (например, какой автомат купить при имеющихся свободных средствах - автомобиль, телевизор или компьютер), региональными условиями или даже национальными особенностями. А также возможностями и политикой государства: на создание какой техники направлять денежные средства - космической, ядерной или профинансировать разработку технологии клонирования человека?

Не исключён и “комбинированный” вариант. В этом случае необходимо ввести коэффициенты ранжирования эффектов

$$\eta = \frac{\mathcal{E} + \alpha_1 \mathcal{E}_c + \alpha_2 \mathcal{E}_k}{3}. \quad (40)$$

где \mathcal{E} , \mathcal{E}_c , \mathcal{E}_k – эффекты от аспектов автоматизации соответственно от экономического, социального и появления нового качества.

Данный критерий выгодно отличается от обычно используемой в экономике разности эффекта и затрат

$$\eta_I = \mathcal{E} - \mathcal{Z}. \quad (41)$$

С одной стороны, он не требует оценки эффекта в тех же единицах, что и затраты (для этого иногда необходима сложная, и часто с элементами большой неопределенности, методика). С другой стороны, не дает отрицательных значений, как это имеет место с разностью (3.4), при малых значениях эффектов. Наконец, при малых значениях эффектов он существенно нелинеен, за счет чего, его способности различать системы автоматизации, максимальны в практически интересной области малых эффектов и больших затрат. Наконец можно констатировать, что данный критерий обобщает и критерий Шаумяна Г.А. (2), и тем самым теория производительности труда может быть развита в более общую теорию автоматизации на базе этого критерия. В этом случае формула производительности труда преобразуется к следующему виду

$$A_T = \frac{N\mathcal{E}_T}{[k + N(m + 1)] T_{ж}}, \quad (42)$$

где \mathcal{E}_r –годовой экономический эффект от автоматизации; остальные составляющие здесь соответствуют обозначениям теории производительности труда.

Прямым следствием применения этого критерия является расширение направлений автоматизации, при котором к прежним трем путям добавляется улучшение качества продукции, множество социальных, экономических, технологических мероприятий, которые повышают значение числителя в формуле (40).

6 Структурный синтез ГПС

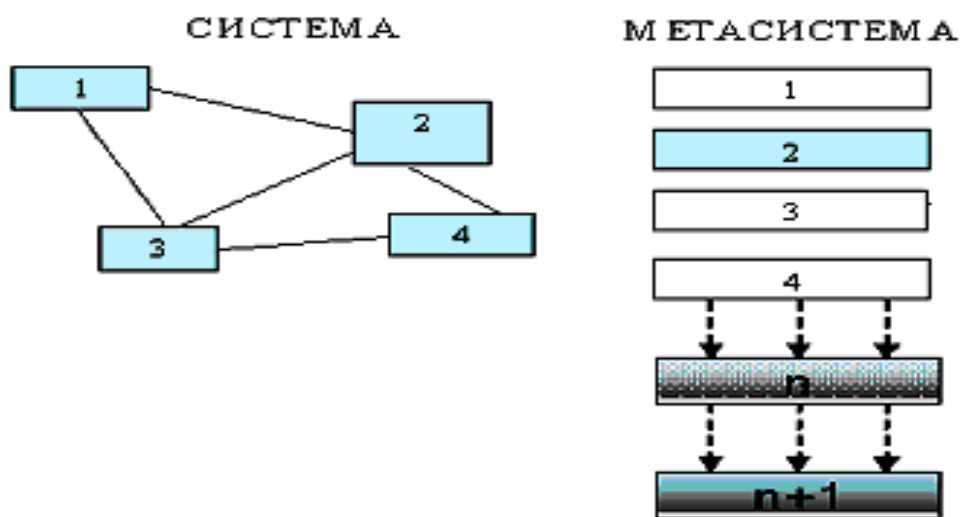
6.1 Метасистемный подход

В соответствии с системологией Дж. Клира /4/ существует два способа интегрирования систем: создание структурированной системы или метасистемы. В первом случае система разбивается на подсистемы, которые в свою очередь дробятся на подсистемы второго уровня и т.д. Во втором случае система формируется на основании правила замены, когда из некоторого набора систем в каждый момент выбирается одна или некоторая группа функционирующих систем.

Структурированную систему характеризуют следующие признаки:

- жесткая взаимосвязь элементов, стабильность связей между ними;
- в каждый момент времени функционируют все элементы системы;
- число элементов системы определяется по принципам полноты и достаточности.

Отличия системы от метасистемы иллюстрируются рисунком 12



ОТЛИЧИЯ

- 1 ПО ПРИНЦИПАМ СИНТЕЗА
- 2 ПО СТЕПЕНИ ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ
- 3 ПО ВРЕМЕНИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Рисунок 12 - Принципиальные отличия системы от метасистемы.

Метасистема по этим аспектам характеризуется тремя другими свойствами.

Во-первых, элементы метасистемы в большой степени самодостаточны и независимы друг от друга.

Во-вторых, в метасистеме в любой момент времени функционируют не все элементы, а лишь один, либо некоторая группа выбранных.

Наконец, в метасистеме общее количество элементов удовлетворяет совсем другим критериям и должно быть оптимальным в соответствии с ними.

Гибкая производственная система как раз и характеризуется некоторой совокупностью возможных для нее технологий. Причем они независимы друг от друга, в каждый момент реализуется лишь одна – выбранная и общее количество этих технологий зависит от назначения ГПС, от ее стоимости от включенного в нее оборудования, но никак не определяется полнотой и достаточностью.

По совокупности приведенных положений можно сделать вывод о правомерности метасистемного подхода к ГПС. Поэтому далее будем рассматривать ГПС с позиций метасистемности.

Метасистемный подход характеризуется рассмотрением шести свойственных только ему задач (связанных с упомянутыми выше отличиями):

- 1) выявление диапазонов эффективности функционирования каждой из технологий или их сочетаний;
- 2) оценка и обеспечение степени готовности технологий к использованию;
- 3) разработка оптимальной стратегии выбора во времени одной технологии или группы одновременно функционирующих;
- 4) обеспечение сочетаемости элементов (технологий) гибкой производственной системы;
- 5) задача оптимального перераспределения общесистемных ресурсов;
- 6) задача синтеза оптимальной метасистемы.

Метасистемный анализ удобнее всего начинать с выявления диапазонов оптимального функционирования систем, поскольку на их основе в дальнейшем удобно разрабатывать стратегию выбора.

При решении этой задачи важно помнить, что метасистема возникает там и тогда, где и когда диапазон решаемой задачи настолько велик, что он не перекрывается использованием одной системы, либо эта система функционирует неэффективно в некоторых частях общего диапазона. Поэтому и возникает задача выявления границ, разделяющих поддиапазоны эффективного функционирования систем. Применительно к гибкой производственной системе легко проводятся границы между областями эффективности значительно отличающихся технологий. Однако в некоторых случаях одна и та же точность детали или квалитет шероховатости могут быть достижимы несколькими методами обработки и тогда вопрос о том какую технологию применять для данной конкретной обстановки становится

довольно сложным. Его приходится решать с привлечением экономического анализа, анализа готовности оборудования, инструментов кадров и так далее.

Поскольку при выборе конкретной технологии и ее исполнении оставшиеся не используются (вместе с оборудованием, кадрами, документацией и так далее) возникает вторая задача по оценке и поддержанию необходимого уровня готовности этих технологий к использованию по первому требованию рынка. Так как момент начала использования технологий носит вероятностный характер, оценивать уровень их готовности удобнее всего плотностью вероятности, а для его поддержания необходимо организовывать комплекс мероприятий. Особенно актуален этот вопрос для редко используемых технологий.

Готовность технологии ($P_{сл}$) к использованию складывается из готовности техники и сооружений (P_T), кадров (P_K), документов (P_D), информационного ($P_{ио}$) и энерго - обеспечения ($P_{эо}$):

$$P_{сл} = P_T P_K P_D P_{ио} P_{эо}. \quad (43)$$

В разные моменты времени уровни готовности технологий меняются, например, не нужен высокий уровень готовности технологии изготовления продукции, которой в данный момент рынок переполнен. На поддержание уровня готовности, а тем более на его повышение, требуются определенные затраты. Определение минимально достаточного уровня готовности технологий в разные моменты времени (создание и мониторинг карты готовности технологий) и минимизация этих затрат является, следовательно, актуальной задачей.

Выявление сочетаемости технологий, связанных с функционированием конкретной ГПС, заключающейся в использовании одного и того же оборудования, инструмента или кадров, позволяет максимально сократить расходы, повысить коэффициент использования оборудования, а также общую эффективность функционирования.

Анализ сочетаемости технологий, реализуемых с помощью данной ГПС позволяет определить необходимость организации дополнительных

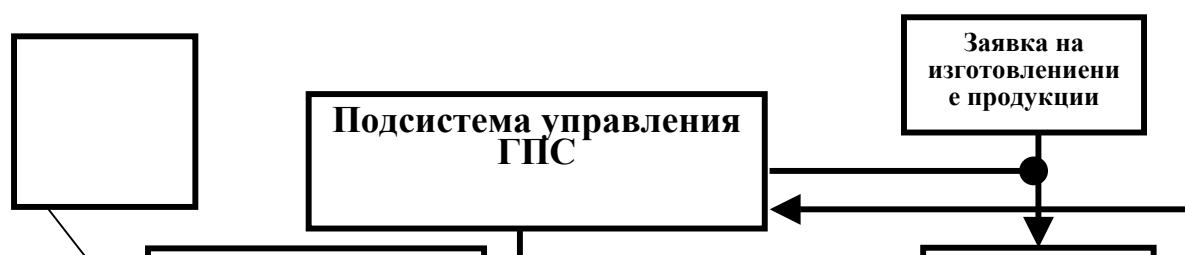
технологий, либо исключения действующих, но малоэффективных. Для этого необходимо рассчитать коэффициенты удельного эффекта – отношение эффекта (Э), даваемого технологией к затратам на ее организацию (З) с учетом перекрытия по оборудованию и кадрам с имеющимися технологиями, отражаемого матрицей перекрытий (С) /5/,/6/

$$\eta = \frac{\text{Э}}{\text{З}(\text{С})}. \quad (44)$$

Если этот коэффициент высок для технологии, планируемой к внедрению по сравнению с имеющимися, то необходимо принять решение о дополнении ею данной ГПС.

Для повышения скорости перемены реализуемой технологии (фактически для повышения гибкости системы) необходимо прогнозировать последовательность поступления заявок с рынка на ту или иную продукцию, чтобы в соответствии с этим прогнозом готовить технологии к использованию, то есть решать четвертую задачу метасистемного подхода - разрабатывать стратегию использования технологий. Поступление заявок иллюстрируется схемой на рисунке 13. При этом вероятность использования технологий можно оценивать и на основе имеющегося предыдущего статистического материала.

При своём функционировании метасистема использует некоторые общесистемные ресурсы (кадры, денежные и материальные средства, оборудование, инструмент и так далее), которые почти всегда ограничены. Оптимальное перераспределение этих ресурсов между реализуемыми технологиями позволит увеличить эффективность на метасистемном уровне. При этом ресурсы могут перераспределяться как во время одновременной реализации нескольких технологий (если это возможно), так и в режиме их ожидания, так как на поддержание их в определённой степени готовности, как говорилось выше, также расходуются средства.



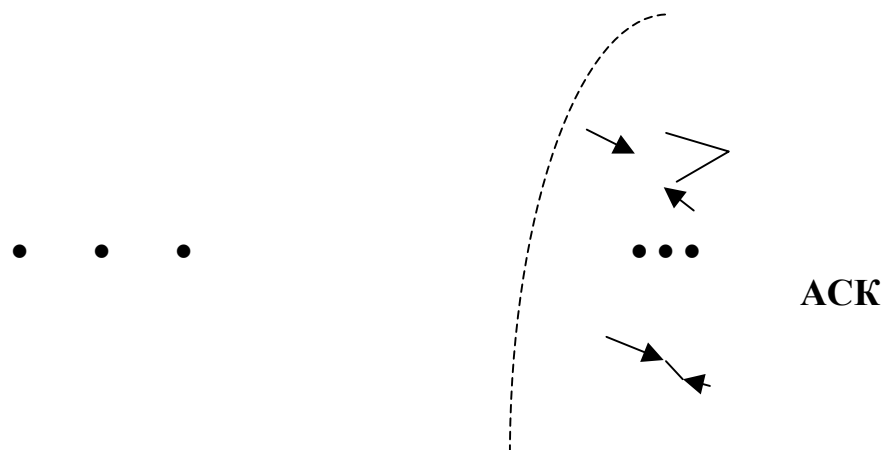


Рисунок 13 - Метасистемная модель функционирования ГПС

Все рассмотренные выше задачи вносят свой вклад в решение последней задачи - синтеза оптимальной метасистемы (ГПС с оптимальным набором технологий). Ввиду особой важности этой задачи рассмотрим ее далее отдельно. Но прежде нам нужны дополнительные сведения из математики.

6.2 Сведения из математики и теории управления

6.2.1 Марковские процессы с непрерывными состояниями

В основе понятия марковского процесса лежит представление об эволюционирующей во времени системе S , обладающей свойством отсутствия последействия – отсутствием «памяти». Иными словами, для марковского процесса будущее состояние определяется настоящим и не зависит от прошлого /7/.

Например S – техническая система, которая уже эксплуатировалась определенное время и пришла в некоторое состояние, характеризуемое определенной степенью изношенности. Нас интересует, как она будет работать в будущем.

Ясно, что по крайней мере в первом приближении, характеристики функционирования системы S в будущем зависят от состояния этой системы в настоящий момент и не зависят от того, когда и как она достигла своего настоящего состояния. При этом, если учесть результаты исследований стохастических моделей состояния, то становится понятным, что состояние изучаемой системы должно являться марковским процессом и, вообще говоря, удовлетворять некоторой *стохастической модели состояния в форме Ито*

$$\begin{cases} d\mathbf{o}(t, \omega) = \mathbf{Ш}(\mathbf{o}(t, \omega), t) + \mathbf{G}(\mathbf{o}(t, \omega), t) \cdot d\mathbf{w}(t, \omega); \\ \mathbf{o}(0, \omega) = \mathbf{o}_0(\omega), \end{cases}$$

где $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [a, b]$, – n -мерный *марковский процесс с непрерывными состояниями*, $\mathbf{Ш}(\xi(t, \omega), t)$ – n – мерная векторная функция, $\mathbf{G}(\xi(t, \omega), t)$ – матричная функция размерности $n \times n$, $\mathbf{w}(t, \omega)$ – винеровский процесс, выходящий из 0, то есть для него выполнены три условия:

- 1) $\mathbf{w}(0, \omega) \equiv 0$;
- 2) для любых $N > 1$ и $t_k \in T$, $k = 1, \dots, N$ таких, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$, случайные векторы $\xi(t_1, \omega)$, $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega), \dots, \xi(t_N, \omega) - \xi(t_{N-1}, \omega)$ являются независимыми;
- 3) для любых $t_1, t_2 \in T$, таких, что $0 \leq t_1 < t_2$, случайный вектор $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$ распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $(t_2 - t_1)\sigma^2 \mathbf{I}_n$, где \mathbf{I}_n – единичная матрица.

Характерной особенностью марковских процессов является возможность выражения любых *конечномерных законов распределения* через двумерные.

Рассмотрим *марковские процессы с непрерывными состояниями*, в которых сечения являются *n*-мерными непрерывными случайными векторами.

Пусть $t, \tau \in T$, и $t < \tau$, – два фиксированных момента времени. Введем обозначения для одномерных, двумерных и условных *функций плотности вероятностей* случайного процесса:

$$\begin{cases} f_1(X) \in f_o(X | t); & f_1(Y) \in f_o(Y | \phi); \\ f_2(X, Y) \in f_o(X, Y | t, \phi); & f(t, X, \phi, Y) \in f_o(Y | X) \end{cases}, \quad (45)$$

где $X \in R^n$, $Y \in R^n$ (R^n – *n*-мерное декартово пространство). Если *случайный процесс* $\xi(t, \omega)$, $\tau \in T$, является скалярным ($n = 1$), то вместо X и Y используют обозначения x и y соответственно. Напомним, что любая *конечномерная функция плотности вероятностей* марковского процесса $\xi(t, \omega)$, $\tau \in T$ может быть выражена через его двумерную функцию плотности вероятностей $f_2(X, Y)$. Отметим, что *условную функцию плотности вероятностей* $f_o(Y | X) \equiv f_2(X, Y) / f_1(X)$ в теории марковских процессов рассматривают как функцию четырех аргументов t, X, τ, Y , что и отражено в обозначениях (45). Условная функция плотности вероятностей любого случайного процесса представляет собой *условную плотность распределения* одного из его *сечений* при условии, что другое его сечение приняло некоторое фиксированное значение. Поэтому, исходя из свойств условной плотности распределения и определения δ -функции Дирака, можно показать, что условная функция плотности вероятностей $f(t, X, \tau, Y)$ имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} f(t, X, \phi, Y) &\geq 0; \quad f(t, X, \phi, Y)|_{t=\tau} = \delta(X - Y); \\ \int_{R^n} f(t, X, \phi, Y) \cdot dY &= 1; \quad f_2(X, Y) = f(t, X, \tau, Y) \cdot f_1(X); \\ f_1(Y) &= \int_{R^n} f(t, X, \phi, Y) \cdot f_1(X) \cdot dX. \end{aligned}$$

Теорема 4.1 Если $\xi(t, \omega)$, $\tau \in T = [a, b]$ – n -мерный марковский процесс и $t, \tau \in T$, $t < \tau$ – любые два фиксированных момента времени, то для любого значения $t' \in (t, \tau)$ имеет место равенство

$$f(t, X, \phi, Y) = \int_{R^n} f(t, X, t', Z) \cdot f(t', Z, \tau, Y) \cdot dZ. \quad (46)$$

Для упрощения и наглядности проводимых рассуждений ограничимся скалярным случаем, то есть полагаем $n = 1$. Пусть $t, t', \tau \in T$, $t < t' < \tau$ – любые три фиксированных момента времени и $f_2(x, y)$ – двумерная функция плотности вероятностей изучаемого случайного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, соответствующая моментам времени t и τ , а $f_3(x, y, z)$ – его трехмерная функция плотности вероятностей, соответствующая моментам времени t, t', τ . При этом

$$f_2(x | y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x, y, z) dz, \quad (47)$$

А так как случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ является марковским, то

$$f_2(x, y) = f_{\xi}(y|x)f_1(x), \quad f_3(x, y, z) = f_{\xi}(y|z)f_{\xi}(z|x)f_1(x)$$

и равенство (47) преобразуется к следующему:

$$f_{\xi}(y | x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(y | z)f_{\xi}(z | x) \cdot dz.$$

Для завершения доказательства достаточно перейти к обозначениям (45).

Равенство (46) известно как **уравнение Маркова – Смолуховского – Чепмена – Колмогорова**. В конце XIX в. русский математик А. А. Марков получил аналог уравнения (46) для марковских процессов с дискретным временем (*цепи Маркова*), польский физик-теоретик М. Ф. Смолуховский в начале XX в. использовал уравнение (46) при изучении броуновского движения, английский геофизик С. Чепмен в 30-х гг. XX в. использовал уравнение (46) для решения кинетического уравнения Больцмана, а русский

математик А. Н. Колмогоров в 40-х гг. XX в. разработал общую аналитическую теорию марковских процессов.

6.2.2. Уравнения Колмогорова

Основная особенность *марковских процессов* связана с тем, что их *условные функции плотности вероятностей* $f(t, X, \tau, Y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа. Это не только существенно упрощает процедуру нахождения $f(t, X, \tau, Y)$, но и позволяет найти решения многих задач прикладного характера.

Условная функция плотности вероятностей $f(t, X, \tau, Y)$ n -мерного *марковского процесса* $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [a, b]$ с *непрерывными состояниями*, рассматриваемая как функция параметров начального состояния $t \in T$ и $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k(X, t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n b_{km}(X, t) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} = 0, \quad (48)$$

в котором векторная функция векторного аргумента

$$a(X, t) = \begin{pmatrix} a_1(X, t) \\ M \\ a_n(X, t) \end{pmatrix} \equiv \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{M[\xi(\tau, \omega) - \xi(t, \omega) | \xi(t, \omega) = X]}{\tau - t} \quad (49)$$

характеризует скорость изменения значений исходного случайного процесса.

Матричная функция векторного аргумента

$$b(X, t) = (b_{km}(X, t)) \equiv \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{M[(\xi(\tau, \omega) - \xi(t, \omega)) \cdot (\xi(\tau, \omega) - \xi(t, \omega))^T | \xi(t, \omega) = X]}{\tau - t}, \quad (50)$$

принимая значения в множестве квадратных матриц порядка n - $M_n(R)$, характеризует скорость изменения условной *дисперсии* этого случайного процесса. В литературе $a(X, t)$ и $b(X, t)$ часто называют **вектором сноса** и

матрицей диффузии соответственно. Из неотрицательной определенности любой ковариационной матрицы и тождества (50) следует неотрицательная определенность матрицы диффузии.

Условная функция плотности вероятностей $f(t, X, \tau, Y)$, рассматриваемая как функция параметров конечного состояния $\tau \in T$ и $Y = (y_1 \dots y_n)^T$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} (a_k(Y, \tau) \cdot f) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_m} (b_{km}(Y, \tau) \cdot f) = 0. \quad (51)$$

Уравнения (48) и (51) называют **первым и вторым уравнениями Колмогорова** соответственно. Уравнение (51) называют также **уравнением Колмогорова – Фоккера – Планка**, поскольку оно встречалось в работах М. К. Планка, А. Д. Фоккера и других физиков еще до того, как его обосновал А. Н. Колмогоров.

Вывод уравнений Колмогорова (48), (51), приведенный ниже, весьма схематичен и реализован для скалярного марковского процесса ($n = 1$) при излишне жестких ограничениях. Но он позволяет уяснить как содержательный смысл самих уравнений, так и входящих в них параметров.

Вывод первого уравнения Колмогорова. Пусть $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [a, b]$ – скалярный марковский случайный процесс и $f(t, x, \tau, y)$ – его условная функция плотности вероятностей. В *уравнении Маркова – Смолуховского – Чепмена – Колмогорова* (46) при $n = 1$ полагаем $t' = t + \Delta$, где $0 < \Delta < \tau - t$ и записываем его в следующем виде:

$$f(t, x, \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, t + \Delta, z) \cdot f(t + \Delta, z, \tau, y) \cdot dz. \quad (52)$$

Предположим, что условная функция плотности вероятностей $f(t + \Delta, z, \tau, y)$ как функция скалярного аргумента z в окрестности точки $z = x$ может быть разложена по формуле Тейлора:

$$f(t + \Delta, z, \tau, y) = f(t + \Delta, x, \tau, y) + \frac{\partial f(t + \Delta, x, \tau, y)}{\partial x} \cdot (z - x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(t + \Delta, x, \tau, y)}{\partial x^2} \cdot (z - x)^2 + \\ + \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 f(t + \Delta, x + \varepsilon(z - x), \tau, y)}{\partial x^3} \cdot (z - x)^3,$$

где $|\varepsilon| \leq 1$. Тогда, согласно (52), получим

$$f(t, x, \tau, y) = f(t + \Delta, x, \tau, y) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, t + \Delta, z) \cdot dz + \\ + \frac{\partial f(t + \Delta, x, \tau, y)}{\partial x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (z - x) \cdot f(t, x, t + \Delta, z) \cdot dz + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(t + \Delta, x, \tau, y)}{\partial x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (z - x)^2 \cdot f(t, x, t + \Delta, z) \cdot dz + \\ + \frac{1}{6} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 f(t + \Delta, x + \varepsilon(z - x), \tau, y)}{\partial x^3} \cdot (z - x)^3 \cdot f(t, x, t + \Delta, z) \cdot dz. \quad (53)$$

Учитывая, что в силу свойств условной функции плотности вероятностей

$$f(t, x, \tau, y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, t + \Delta, z) \cdot dz \equiv 1,$$

переносим первое слагаемое в правой части (53) в левую часть, делим обе части полученного равенства на Δ и переходим к пределу при $\Delta \rightarrow +0$. Этот предельный переход возможен, если существует предел

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\Delta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 f(t + \Delta, x + \varepsilon(z - x), \tau, y)}{\partial x^3} \cdot (z - x)^3 \cdot f(t, x, t + \Delta, z) \cdot dz \right) \equiv 0. \quad (54)$$

В результате получаем первое уравнение Колмогорова (48) при $n = 1$, в котором функции $a(x, t)$ и $b(x, t)$ заданы соотношениями (49) и (50) соответственно.

Предположение (54) в сущности означает, что *вероятность* больших отклонений $|\xi(t', \omega) - \xi(t, \omega)|$ снижается при уменьшении $\Delta = t' - t$, причем все

моменты случайной величины $|\xi(t', \omega) - \xi(t, \omega)|$, начиная с третьего, имеют порядок малости $o(\Delta)$.

В предельном переходе к уравнению (48) для функций $a(x, t)$ и $b(x, t)$ получаем соотношения

$$a(x, t) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\Delta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (z - x) \cdot f(t, x, t + \Delta, z) \cdot dz \right),$$

$$b(x, t) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\Delta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (z - x)^2 \cdot f(t, x, t + \Delta, z) \cdot dz \right),$$

которые эквивалентны представлениям (49), (50), если в них положить $\tau = t + \Delta$.

Вывод второго уравнения Колмогорова. Второе уравнение Колмогорова (51) является сопряженным по отношению к первому уравнению Колмогорова (48). Поэтому его вывод осуществляется несколько более искусственным способом, чем вывод (48).

Пусть α и β – границы интервала изменения значений скалярного марковского процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [a, b]$ с условной функцией плотности вероятностей $f(t, x, \tau, y)$, а $R(y)$ – любая дважды непрерывно дифференцируемая на этом интервале неслучайная функция, удовлетворяющая условиям

$$R(\alpha) = R'(\alpha) = R(\beta) = R'(\beta) = 0. \quad (55)$$

Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x, \tau, y)}{\partial \tau} \cdot R(y) \cdot dy = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\Delta} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (f(t, x, \tau + \Delta, y) - f(t, x, \tau, y)) \cdot R(y) \cdot dy \right), \quad (56)$$

так как в правой части равенства возможен предельный переход под знаком интеграла. Согласно уравнению Маркова – Смолуховского – Чепмена – Колмогорова (46),

$$f(t, x, \tau + \Delta, y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x, \tau, z) \cdot f(t, z, \tau + \Delta, y) dz.$$

Поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t, x, \tau + \Delta, y) \cdot R(y) \cdot dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x, \tau, z) \cdot f(t, z, \tau + \Delta, y) \cdot R(y) \cdot dz \cdot dy.$$

Если в двойном интеграле справа изменить обозначения переменных интегрирования, заменив z на y и y на z , то с его помощью равенство (56) приводится к следующему:

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x, \tau, y)}{\partial \tau} \cdot R(y) \cdot dy = \\ & = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \left[\frac{1}{\Delta} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x, \tau, y) \cdot \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, y, \tau + \Delta, z) \cdot R(z) \cdot dz - R(y) \right) \cdot dy \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Согласно принятому допущению, функция $R(z)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале интегрирования. Поэтому ее можно представить в виде

$$R(z) = R(y) + R'(y) \cdot (z - y) + \frac{1}{2} \cdot R''(y) \cdot (z - y)^2 + o(|z - y|^3).$$

С учетом обозначений (49), (50) и в силу принятого допущения (54) о вероятности больших отклонений $|\xi(t', \omega) - \xi(t, \omega)|$ получим

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\Delta} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, y, \tau + \Delta, z) \cdot \left(R(y) + R'(y) \cdot (z - y) + \frac{1}{2} \cdot R''(y) \cdot (z - y)^2 + o(|z - y|^3) \right) \cdot dz - R(y) \right) = \\ & = R'(y) \cdot a(y, \tau) + \frac{1}{2} \cdot R''(y) \cdot b(y, \tau). \end{aligned}$$

Подставив этот результат в (57), приходим к равенству

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x, \tau, y)}{\partial \tau} \cdot R(y) \cdot dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(a(y, \tau) \cdot R'(y) + \frac{1}{2} \cdot b(y, \tau) \cdot R''(y) \right) \cdot f(t, x, \tau, y) \cdot dy,$$

которое интегрированием по частям с учетом условий (55) преобразуется к виду

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\partial f(t, x, \tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} (a(y, \tau) \cdot f(t, x, \tau, y)) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(y, \tau) \cdot f(t, x, \tau, y)) \right] \cdot R(y) \cdot dy = 0.$$

Полученное уравнение в силу произвольности функции $R(y)$ приводит ко второму уравнению Колмогорова (51).

Рассмотрим n -мерный случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [0, \infty]$, удовлетворяющий стохастической модели состояния в форме Ито:

$$\begin{cases} d\xi(t, \omega) = \Psi(\xi(t, \omega), t)dt + G(\xi(t, \omega), t)dw(t, \omega); \\ \xi(0, \omega) = \xi_0(\omega), \end{cases} \quad (58)$$

где $w(t, \omega)$, $t \in T$ – n -мерный винеровский процесс, выходящий из 0. Пусть при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ и $X \in \xi(t, \omega)$ векторная функция $\Psi(X, t)$ и матричная функция $G(X, t)$ удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши (58) и являются непрерывными по t на промежутке T . В этом случае стохастическая модель состояния (58) задает марковский процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ и его условная функция плотности вероятностей должна удовлетворять уравнениям Колмогорова (58), (51). Определим коэффициенты этих уравнений, для чего воспользуемся интегральным представлением стохастической модели состояния (58). Имеем

$$\xi(t + \Delta, \omega) - \xi(t, \omega) = \int_t^{t+\Delta} \Psi(\xi, \tau) \cdot d\tau + \int_t^{t+\Delta} G(\xi, \tau) \cdot dw(\tau, \omega). \quad (59)$$

Второй интеграл в правой части (59) является стохастическим интегралом Ито.

$$M \left[\int_t^{t+\Delta} G(\xi, \tau) \cdot dw(\tau, \omega) \mid \xi = X \right] \equiv 0, \quad (60)$$

$$M \left[\left(\int_t^{t+\Delta} G(\xi, \tau) \cdot dw(\tau, \omega) \right) \cdot \left(\int_t^{t+\Delta} G(\xi, \tau) \cdot dw(\tau, \omega) \mid \xi = X \right) \right] = \int_t^{t+\Delta} G(X, \tau) \cdot G^T(X, \tau) \cdot d\tau. \quad (61)$$

А так как $\Psi(X, t)$ непрерывна по t , то из (59), согласно (60) и теореме о среднем, имеем

$$M[\xi(t + \Delta, \omega) - \xi(t, \omega) | \xi = X] = \int_t^{t+\Delta} \Psi(X, \tau) \cdot d\tau = \Psi(X, \tau_*) \cdot \Delta,$$

где $t \leq \tau_* \leq t + \Delta$. Подставив полученный результат в (49) и перейдя к пределу при $\Delta \rightarrow +0$, находим

$$(62) \quad a(X, t) = \Psi(X, t).$$

А так как

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \left[\frac{1}{\Delta} \cdot \left(\int_t^{t+\Delta} \Psi(X, \tau) \cdot d\tau \right) \cdot \left(\int_t^{t+\Delta} \Psi(X, \tau) \cdot d\tau \right)^T \right] \equiv \Theta,$$

(здесь Θ - нулевая матрица), то согласно (50), (59)-(61)

$$b(X, t) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \left[\frac{1}{\Delta} \cdot \int_t^{t+\Delta} G(X, \tau) \cdot G^T(X, \tau) \cdot d\tau \right] = G(X, t) \cdot G^T(X, t). \quad (63)$$

6.2.3. Стохастические модели состояния и уравнения Колмогорова

Равенства (62), (63) устанавливают связь между *стохастической моделью состояния в форме Ито* (58) и *уравнениями Колмогорова* при довольно жестких ограничениях. Поэтому возникает естественное желание ослабить эти ограничения и получить уравнения Колмогорова, непосредственно исходя из *стохастической модели состояния*.

Пусть $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ n -мерный *случайный процесс*, удовлетворяющий стохастической модели состояния (58) в форме Ито, а $f_\xi(X|t)$ – его *одномерная функция плотности вероятностей*. Определим *характеристическую функцию* изучаемого *случайного процесса* $\xi(t, \omega)$, $t \in T$:

$$g(\lambda, t) \equiv M[e^{i\lambda \cdot \xi(t, \omega)}] \equiv \int_{R^n} e^{i\lambda \cdot X} \cdot f_\xi(X|t) dX,$$

где $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ и рассмотрим разность

$$g(\lambda, t + \Delta t) - g(\lambda, t) = M \left[e^{i \cdot \lambda \cdot \xi(t + \Delta t, \omega)} - e^{i \cdot \lambda \cdot \xi(t, \omega)} \right] = M \left[\left(e^{i \cdot \lambda \cdot (\xi(t + \Delta t, \omega) - \xi(t, \omega))} - 1 \right) \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot \xi(t, \omega)} \right].$$

Нас будет интересовать предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{g(\lambda, t + \Delta t) - g(\lambda, t)}{\Delta t}$$

Поэтому в дальнейших рассуждениях с целью упрощения выкладок будем пренебрегать слагаемыми порядка малости $o(\Delta t)$ и писать:

$$\xi(t + \Delta t, \omega) - \xi(t, \omega) = \Psi(\xi(t, \omega), t) \cdot \Delta t + G(\xi(t, \omega), t) \cdot \Delta w(t, \omega),$$

$$\Delta w(t, \omega) = w(t + \Delta t, \omega) - w(t, \omega),$$

$$e^{i \cdot \lambda \cdot \Pi(o(t, \Pi), t) \cdot \Delta t} - 1 = i \cdot \lambda \cdot \Pi(o(t, \Pi), t) \cdot \Delta t,$$

Таким образом, при $\xi \equiv \xi(t, \omega)$, $t \in T$

$$\begin{aligned} g(\lambda, t + \Delta t) - g(\lambda, t) &= M \left[\left(e^{i \cdot \lambda \cdot [\Psi(\xi, t) \Delta t + G(\xi, t) \Delta w]} - 1 \right) \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot \xi} \right] = \\ &= M \left[\left(e^{i \cdot \lambda \cdot G(\xi, t) \Delta w} \cdot \left(e^{i \cdot \lambda \cdot \Psi(\xi, t) \Delta t} - 1 \right) + e^{i \cdot \lambda \cdot G(\xi, t) \Delta w} - 1 \right) \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot \xi} \right] = \\ &= M \left[\left(i \cdot \lambda \cdot \Psi(\xi, t) \cdot \Delta t \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot G(\xi, t) \Delta w} + e^{i \cdot \lambda \cdot G(\xi, t) \Delta w} - 1 \right) \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot \xi} \right]. \end{aligned}$$

Фиксируем $t \in T$. Обозначим через $f_*(X, Z|t)$ плотность распределения случайного вектора $(\xi^T(t, \omega) \Delta w^T(t, \omega))^T$, а через $f_w(Z|t)$ – плотность распределения случайного вектора $\Delta w(t, \omega)$. Тогда в силу независимости сечений $\Delta w(t, \omega)$ от $\xi(t, \omega)$ имеем

$$f_*(X, Z|t) = f_\xi(X|t) \cdot f_w(Z|X, t) = f_\xi(X|t) \cdot f_w(Z|t).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} g(\lambda(t + \Delta t)) - g(\lambda(t)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(i \cdot \lambda \cdot \Psi(X, t) \cdot \Delta t \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot Z} + e^{i \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot Z} - 1 \right) \times \\ &\quad \times e^{i \cdot \lambda \cdot X} \cdot f_\xi(X|t) \cdot f_w(Z|t) \cdot dX \cdot dZ = \\ &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(i \cdot \lambda \cdot \Psi(X, t) \cdot \Delta t \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot Z} \cdot f_w(Z|t) \cdot dZ + \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot Z} \cdot f_w(Z|t) \cdot dZ - 1 \right) \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot X} \cdot f_\xi(X|t) \cdot dX \end{aligned}$$

А так как $w(t, \omega)$, $t \in [0, \infty)$ – n -мерный винеровский процесс и

$$M[\Delta w(t, \omega)] = 0, M[\Delta w(t, \omega) (\Delta w(t, \omega))^T] = I_n \Delta t,$$

то плотность распределения $f_w(Z|t)$ для случайного вектора $\Delta w(t, \omega)$ есть плотность n -мерного нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\Sigma = I_n \Delta t$ и определяется равенством

$$f_w(Z|t) = \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot \pi \cdot \Delta t)^n}} \exp\left(-\frac{Z^T \cdot Z}{2 \cdot \Delta t}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot Z} \cdot f_w(Z|t) \cdot dZ &= \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot \pi \cdot \Delta t)^n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot Z - \frac{Z^T \cdot Z}{2 \cdot \Delta t}\right) \cdot dZ = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot G^T(X, t) \cdot \lambda^T \cdot \Delta t\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot \pi \cdot \Delta t)^n}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot (Z - i \cdot (\lambda \cdot G(X, t))^T \cdot \Delta t)^T \cdot (Z - i \cdot (\lambda \cdot G(X, t))^T \cdot \Delta t)^T\right) \cdot dZ = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot G^T(X, t) \cdot \lambda^T \cdot \Delta t\right), \end{aligned}$$

так как функция

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot \pi \cdot \Delta t)^n}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot (Z - i \cdot (\lambda \cdot G(X, t))^T \cdot \Delta t)^T \cdot (Z - i \cdot (\lambda \cdot G(X, t))^T \cdot \Delta t)^T\right)$$

является n -мерной плотностью нормального распределения и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Z) \cdot dZ = 1.$$

Используя полученный результат, заменяя экспоненту первыми двумя членами ее разложения по формуле Тейлора и отбрасывая слагаемые порядка малости $o(\Delta t)$, получаем

$$\begin{aligned} g(\lambda, t + \Delta t) - g(\lambda, t) &= \\ \int_{\mathbb{R}^n} \left(i \cdot \lambda \cdot \Psi(X, t) \cdot \Delta t \cdot e^{-0.5 \lambda \cdot G(X, t) \cdot G^T(X, t) \cdot \lambda^T \cdot \Delta t} + e^{-0.5 \lambda \cdot G(X, t) \cdot G^T(X, t) \cdot \lambda^T \cdot \Delta t} - 1 \right) \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot X} \cdot f_0(X|t) \cdot dX &= \\ \int_{\mathbb{R}^n} \left(i \cdot \lambda \cdot \Psi(X, t) \cdot \Delta t \cdot (1 - 0.5 \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot G^T(X, t) \cdot \lambda^T \cdot \Delta t) - 0.5 \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot G^T(X, t) \cdot \lambda^T \cdot \Delta t \right) \times \\ \times e^{i \cdot \lambda \cdot X} \cdot f_\xi(X|t) \cdot dX &= \end{aligned}$$

$$= \int_{R^n} \left(i \cdot \lambda \cdot \Psi(X, t) \cdot \Delta t - 0.5 \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot G^T(X, t) \cdot \lambda^T \cdot \Delta t \right) \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot X} \cdot f_0(X | t) \cdot dX.$$

Разделив правую и левую части полученного равенства на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, найдем

$$\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} = \int_{R^n} \left(i \cdot \lambda \cdot \Psi(X, t) - \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot G^T(X, t) \cdot \lambda^T \right) \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot X} \cdot f_0(X | t) \cdot dX.$$

Для перехода от характеристической функции к функции плотности вероятностей достаточно воспользоваться формулой обращения экспоненциального интегрального преобразования Фурье:

$$f(Y | t) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^n} \cdot \int_{R^n} e^{-i \cdot \lambda \cdot Y} \cdot g(\lambda, t) \cdot d\lambda.$$

В результате приходим к следующему уравнению относительно функции $f_\xi(Y | t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\xi(Y, t)}{\partial t} = & \frac{1}{(2 \cdot \pi)^n} \cdot \int_{R^n} \int_{R^n} \left(i \cdot \lambda \cdot \Psi(X, t) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot G(X, t) \cdot G^T(X, t) \cdot \lambda^T \cdot \Delta t \right) \times \\ & \times e^{i \cdot \lambda \cdot (X - Y)} \cdot f_\xi(X | t) \cdot dX \cdot d\lambda. \end{aligned} \quad (64)$$

Прежде чем приступить к анализу полученного уравнения (64), приведем без доказательства некоторые свойства δ -функции Дирака:

1) если $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ и $X = (x_1 \dots x_n)^T$, то

$$\delta(X) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^n} \cdot \int_{R^n} e^{i \cdot \lambda \cdot X} \cdot d\lambda = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \lambda_k \cdot x_k} \cdot dx_k \right) = \prod_{k=1}^n \delta(x_k);$$

2) если функция $\varphi(X)$ непрерывна в R^n , то для любого $Y \in R^n$

$$\int_{R^n} \varphi(X) \cdot \delta(X - Y) \cdot dX = \int_{R^n} \varphi(X) \cdot \delta(Y - X) \cdot dX = \varphi(Y);$$

3) если функции $\varphi(X)$ и $\varphi'_{x_k}(X)$ непрерывны в R^n , то для любого $Y \in R^n$

$$\int_{R^n} \varphi(X) \cdot \frac{\partial \delta(X - Y)}{\partial x_k} \cdot dX = - \int_{R^n} \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_k} \cdot \delta(Y - X) \cdot dX = - \left. \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_k} \right|_{X=Y};$$

4) если функции $\varphi(X)$ и $\varphi''_{x_i x_j}(X)$ непрерывны в R^n , то для любого $Y \in R^n$

$$\int_{R^n} \varphi(X) \cdot \frac{\partial^2 \delta(X-Y)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot dX = \int_{R^n} \frac{\partial^2 \varphi(X)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \delta(Y-X) \cdot dX = - \frac{\partial^2 \varphi(X)}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{X=Y};$$

5) в интегралах, содержащих δ -функцию Дирака и ее производные, можно выполнить дифференцирование по параметру под знаком интеграла сколько угодно раз;

6) для частных производных δ -функции Дирака имеют место интегральные представления

$$\frac{\partial \delta(X)}{\partial x_k} = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^n} \cdot \int_{R^n} i \cdot \lambda_k \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot X} \cdot d\lambda, \quad \frac{\partial^2 \delta(X)}{\partial x_i \partial x_j} = - \frac{1}{(2 \cdot \pi)^n} \cdot \int_{R^n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot X} \cdot d\lambda.$$

Обратимся теперь к уравнению (64). Если $\Psi_k(X, t)$ – k -я координатная функция для векторной функции $\Psi(X, t)$, а $G_{ij}(X, t)$ – скалярная функция, расположенная на пересечении i -й строки и j -го столбца *матричной функции* $G(X, t) \cdot G(X, t)^T$, то (64) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(Y, t)}{\partial t} &= \sum_{k=1}^n \int_{R^n} \Psi_k(X, t) \cdot f_\xi(X | t) \cdot \left(\frac{1}{(2 \cdot \pi)^n} \int_{R^n} i \cdot \lambda_k \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot (X-Y)} \cdot d\lambda \right) \cdot dX - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{R^n} G_{ij}(X, t) \cdot f_\xi(X | t) \cdot \left(\frac{1}{(2 \cdot \pi)^n} \int_{R^n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot (X-Y)} \cdot d\lambda \right) \cdot dX \end{aligned}$$

Таким образом, согласно свойствам δ -функции Дирака,

$$\begin{aligned} &\int_{R^n} \Psi_k(X, t) \cdot f_\xi(X | t) \cdot \left(\frac{1}{(2 \cdot \pi)^n} \int_{R^n} i \cdot \lambda_k \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot (X-Y)} \cdot d\lambda \right) \cdot dX = \\ &= \int_{R^n} \Psi_k(X, t) \cdot f_\xi(X | t) \cdot \frac{\partial \delta(X-Y)}{\partial x_k} \cdot dX = - \frac{\partial}{\partial x_k} [\Psi_k(X, t) \cdot f_\xi(X | t)] \Big|_{X=Y} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_k} [\Psi_k(Y, t) \cdot f_\xi(Y | t)], \\ &\int_{R^n} G_{ij}(X, t) \cdot f_\xi(X | t) \cdot \left(\frac{1}{(2 \cdot \pi)^n} \int_{R^n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot (X-Y)} \cdot d\lambda \right) \cdot dX = \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial x_i \cdot \partial x_j} [G_{ij}(X, t) \cdot f_\xi(X | t)]_{X=Y} = - \frac{\partial^2}{\partial y_i \cdot \partial y_j} [G_{ij}(Y, t) \cdot f_\xi(Y | t)] \end{aligned}$$

и мы приходим ко *второму уравнению Колмогорова* (51) при замене t на τ :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} (\psi_k \cdot f) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \cdot \partial y_j} \cdot (G_{ij} \cdot f) = 0.$$

Если вспомнить, что Ψ_k – k -я координатная функция векторной функции Ψ , а G_{ij} – скалярная функция, расположенная на пересечении i -й строки и j -го столбца матричной функции $G(X, t) \cdot G^T(X, t)$, то из сопоставления полученного уравнения с (51) можно получить (62) и (63). Заметим также, что при выводе второго уравнения Колмогорова в данном случае не использовалось ограничение (54), а равенства (62) и (63) верны и при отсутствии непрерывности функций $\Psi(X, t)$, $G(X, t)$ по $t \in T$.

Равенства (62), (63) позволяют реализовать переход от стохастической модели состояния (58) к уравнениям Колмогорова (48), (51), которым удовлетворяет *условная функция плотности вероятностей* $f(t, X, \tau, Y)$ марковского процесса $\xi(t, \omega;)$, $t \in T$, определяемого стохастической моделью состояния (58). А так как уравнения Колмогорова (48), (51) полностью определяются матричной функцией $b(X, t)$ и векторной функцией $a(X, t)$, то равенства (62), (63) позволяют реализовать и обратный переход от уравнений Колмогорова к *стохастическому дифференциальному уравнению*.

Пусть второе уравнение Колмогорова для условной функции плотности вероятностей $f(t, x, \tau, y)$ скалярного *марковского процесса* $\xi(t, \omega;)$, $t \in T = [0, \infty)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \cdot f) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sin(\tau \cdot y) \cdot f).$$

Согласно (51) имеем

$$a(x, t) = -x^2, \quad b(x, t) = 2 \cdot \sin(t \cdot x).$$

Так как *матрица диффузии* неотрицательно определена, то уравнение Колмогорова определено лишь для значений τ и y , удовлетворяющих неравенству $\sin(\tau \cdot y) \geq 0$. Таким образом, из соотношений (62), (63) следует, что

$$\Psi(x, t) = -x^2, \quad G(x, t) = \sqrt{2 \cdot \sin(t \cdot x)},$$

то есть скалярный марковский процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ удовлетворяет *стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ито*:

$$d\xi(t, \omega) = -\xi^2(t, \omega) \cdot dt + \sqrt{2 \cdot \sin(t \cdot \xi(t, \omega))} \cdot dw(t, \omega),$$

где $w(t, \omega)$, $t \in T$ – скалярный *винеровский процесс*, выходящий из 0. Знак перед радикалом в выражении для $G(x, t)$ не играет роли в силу свойств случайного процесса $w(t, \omega)$, $t \geq 0$.

Если векторная функция $a(X, t)$ известна, то векторную функцию $\Psi(X, t)$, входящую в стохастическую модель состояния (58), можно однозначно определить из (62). Пусть известна матричная функция $b(X, t)$. Рассмотрим (63) как нелинейную систему алгебраических уравнений относительно элементов $g_{ij}(X, t)$ матричной функции $G(X, t)$. Нелинейная система (63) вследствие симметричности матричной функции $b(X, t)$ (это следует из равенства (50)) имеет лишь $n(n+1)/2$ линейно независимых уравнений и n^2 неизвестных $g_{ij}(X, t)$. А так как при $n > 1$ имеет место очевидное неравенство $n^2 > n(n+1)/2$, то в общем случае система (63) имеет бесконечное множество решений.

Итак, в общем случае переход от уравнений Колмогорова к стохастическим моделям состояния, определяющим исходные марковские процессы, не является однозначным. Более того, эта неоднозначность возможна и в скалярном случае, то есть при $n = 1$.

В практике научных исследований для матричной функции $G(X, t)$ вводят, как правило, дополнительное ограничение

$$G^T(X, t) = G(X, t),$$

позволяющее преобразовать матричное уравнение (63) к стандартному виду

$$G^2(X, t) = b(X, t).$$

Тогда можно достаточно просто найти решение этого уравнения с помощью *квадратного корня из квадратной симметрической матрицы*, который определяется с точностью до знака:

$$G(X, t) = \sqrt{b(X, t)} \quad (65).$$

Определим систему стохастических дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет двумерный марковский процесс

$$\xi(t, \omega) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, \omega) \\ \xi_2(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, \infty],$$

если условная функция плотности вероятностей этого случайного процесса $f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2)$ удовлетворяет *первому уравнению Колмогорова* с известными параметрами k, σ^2, h :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} - (k^2 \cdot x_1 + 2 \cdot h \cdot x_2) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0.$$

Согласно (48), имеем

$$\begin{aligned} a_1(X, t) &= x_2, & a_2(X, t) &= -(k^2 \cdot x_1 + 2 \cdot h \cdot x_2), \\ b_{11}(X, t) &\equiv b_{12}(X, t) \equiv b_{21}(X, t) \equiv 0, & b_{22}(X, t) &\equiv \sigma^2. \end{aligned}$$

Таким образом, матричная функция $b(X, t)$ является симметрической и для завершения решения исходной задачи достаточно воспользоваться равенствами (62), (65):

$$\Psi_1(X, t) = x_2, \quad \Psi_2(X, t) = -k^2 \cdot x_1 - 2 \cdot h \cdot x_2,$$

$$G(X, t) = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

и выписать систему стохастических дифференциальных уравнений, входящих в стохастическую модель состояния (58):

$$d\xi_1(t, \omega) = \xi_2(t, \omega) \cdot dt,$$

$$d\xi_2(t, \omega) = -[k^2 \cdot \xi_1(t, \omega) + 2 \cdot h \cdot \xi_2(t, \omega)] \cdot dt + \sigma \cdot dw(t, \omega),$$

где $dw(t, \omega), t \in T$ – скалярный винеровский процесс, выходящий из нуля.

В заключение отметим следующее.

1. При любых фиксированных значениях X и t матрица диффузии $b(X, t)$ является симметрической и неотрицательно определенной. Поэтому с помощью ортогонального преобразования ее можно привести к

диагональному виду, то есть существует такая ортогональная матрица $T(X, t)$, что

$$T^T(X, t) \cdot b(X, t) \cdot T(X, t) = \beta(X, t) = \text{diag}(\beta_1^2(X, t), \dots, \beta_n^2(X, t)).$$

При этом для определенности полагаем

$$\sqrt{\beta(X, t)} \in \text{diag}(|\beta_1(X, t)|, \dots, |\beta_n(X, t)|).$$

А так как равенство

$$G^2(X, t) = b(X, t)$$

эквивалентно равенству

$$(T^T(X, t) \cdot G(X, t) \cdot T(X, t))^2 = T^T(X, t) \cdot b(X, t) \cdot T(X, t) = \beta(X, t)$$

то

$$G(X, t) = T(X, t) \cdot \sqrt{\beta(X, t)} \cdot T^T(X, t).$$

Например, чтобы вычислить квадратный корень из неотрицательно определенной симметрической матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{pmatrix},$$

находим ее собственные числа $\beta_1^2 = 1$, $\beta_2^2 = 4$ и соответствующие им единичные собственные векторы, которые образуют ортонормированную систему. Затем записываем матрицу

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sqrt{b} &= T \cdot \sqrt{\beta} \cdot T^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Переход от уравнений Колмогорова к соответствующим системам стохастических дифференциальных уравнений в общем случае не является

однозначным, но представляет интерес, так как эти системы определяют марковские случайные процессы, эквивалентные по своим вероятностным свойствам процессам, для которых заданы соответствующие уравнения Колмогорова.

3. Случайные процессы $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, и $\eta(t, \omega)$, $t \in T$ называют **независимыми (некоррелированными) случайными процессами**, если для любых $t, t \in T$ случайные величины $\xi(t, \omega)$ и $\eta(t, \omega)$ независимые (некоррелированные).

6.2.4. Постановки задач для нахождения условной функции плотности вероятностей

Уравнения Колмогорова (48), (51) являются уравнениями в частных производных параболического типа. Для того, чтобы их решение определялось однозначно, необходимо задать *начальные и граничные условия*.

Начальное условие определяет зависимость искомой функции $f(t, X, \tau, Y)$ от «пространственных координат», представленных n -мерным вектором X для *первого уравнения Колмогорова* и n -мерным вектором Y для *второго уравнения Колмогорова* в заданный (начальный) момент времени, определяемый значением переменного t или τ соответственно.

Начальные условия для уравнений Колмогорова, как правило, устанавливают из смысла решаемой задачи. Для второго уравнения Колмогорова (51) естественно считать начальным значением временной переменной τ настоящий момент времени t . Если начальное значение исходного марковского процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ предполагается заданным, то *условная функция плотности вероятностей* $f(t, X, \tau, Y)$ в начальный момент времени $\tau = t$ обращается в δ -функцию Дирака. Таким образом, в данной ситуации начальное условие имеет вид

$$f(t, X, \tau, Y) \Big|_{\tau=t} = \delta(X - Y). \quad (66)$$

Если начальное состояние изучаемого *случайного процесса* неизвестно, оно должно рассматриваться как *случайный вектор* с *плотностью распределения* $f_0(Y)$, а начальное условие принимает следующий вид:

$$f(t, X, \tau, Y) \Big|_{\tau=t} = f_0(Y). \quad (67)$$

Начальное условие для первого уравнения Колмогорова вводят аналогично начальным условиям (66), (67) для второго.

Уравнения Колмогорова (48), (51) можно интерпретировать с позиций математической физики как уравнения массопереноса. При таком подходе функции a и b , определяемые равенствами (49), (50), будут характеризовать конвективные и диффузионные составляющие процесса массопереноса. Поэтому их элементы зачастую называют ***коэффициентами сноса и диффузии*** соответственно.

Граничные условия для каждого из уравнений Колмогорова фактически являются условиями изолированности области $G \subset R^n$ изменения рассматриваемого n -мерного *марковского процесса* $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [a, b]$. В рамках рассматриваемой интерпретации этих уравнений условия изолированности области $G \subset R^n$ означают, что соответствующие суммарные потоки обращаются в нуль на границе области Γ_G . С учетом этого граничные условия (51) можно задать следующим образом:

для второго уравнения Колмогорова

$$\left(a_k(Y, \Phi) \cdot f - \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial y_m} (b_{km}(Y, \Phi) \cdot f) \right) \Big|_{y \in \Gamma_G} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (68)$$

для первого уравнения Колмогорова (48)

$$\left\{ \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^n b_{km}(X, t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_m} - \left[a_k(X, \Phi) \cdot f - \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^n \frac{\partial b_{km}(X, \Phi)}{\partial y_m} \cdot f \right] \right\} \Big|_{X \in \Gamma_G} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (69)$$

Если $G = R^n$, то граничные условия (68), (69) можно упростить:
для первого уравнения Колмогорова

$$\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} f(t, X, \tau, Y) \equiv 0, \quad (70)$$

для второго уравнения Колмогорова

$$\lim_{\|Y\| \rightarrow \infty} f(t, X, \phi, Y) \equiv 0. \quad (71)$$

Решения уравнений Колмогорова (48), (51) для начальных и граничных условиях вида (58)-(63) должны удовлетворять стандартным требованиям, предъявляемым к любой условной функции плотности вероятностей:

$$f(t, X, \tau, Y) \geq 0, \quad \int_{R^n} f(t, X, \tau, Y) \cdot dY \equiv 1.$$

Рассмотрим скалярный случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [0, \infty)$, который является решением *стохастической задачи Коши*:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t, \omega) + \alpha \cdot \xi(t, \omega) = m \cdot \eta(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) \equiv x_0, \end{cases}$$

где α , m , x_0 – неслучайные величины, а $\eta(t, \omega)$, $t \in T$ – *белый шум* с *единичной интенсивностью*.

Исходная *стохастическая модель состояния* может быть записана в *форме Стратоновича*:

$$\begin{cases} d\xi(t, \omega) = -\alpha \cdot \xi(t, \omega) \cdot dt + m \cdot dw(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) \equiv x_0. \end{cases}$$

В данном случае m не зависит от состояния $\xi(t, \omega)$, $t \in T$. Следовательно, *стохастическая модель состояния в форме Ито* имеет тот же вид. Таким образом, $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ является марковским процессом и его стохастическую модель состояния характеризуют функции

$$\Psi(x, t) = -\alpha \cdot x, \quad G(x, t) = m$$

и детерминированное начальное состояние x_0 .

Для определения коэффициентов сноса и диффузии достаточно воспользоваться равенствами (62) и (63):

$$a(x, t) = \Psi(x, t) = -\alpha \cdot x, \quad b(x, t) = G^2(x, t) = m^2.$$

А так как начальное состояние является детерминированным, то, согласно (51), (66), (71), можно сформулировать задачу для нахождения условной функции плотности вероятностей $f(t, x, \tau, y)$ случайного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [0, \infty)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \tau} = \bar{\sigma} \cdot \frac{\partial(y \cdot f)}{\partial y} + \frac{m^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; & \phi > 0; \quad x, y \in \mathbb{R}; \\ f(t, x, \phi, y)|_{\phi=t} = d(x - y); \\ \lim_{y \rightarrow \infty} f(t, x, \phi, y) = 0; \end{cases} \quad (72)$$

решение которой может быть получено с помощью интегральных преобразований.

Полагая $\rho = \tau - t$, к задаче (72) применяем экспоненциальное интегральное преобразование Фурье по переменной y . В этом случае изображением экспоненциального интегрального преобразования Фурье условной функции плотности вероятностей $f(t, x, \tau, y)$ является *характеристическая функция случайного процесса* $\xi(t, \omega)$, $t \in T$:

$$g(\lambda, \rho, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \cdot y} \cdot f(t, x, \tau, y) \cdot dy,$$

которая, в силу (72) и свойств экспоненциального преобразования Фурье, является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial c} = -\frac{m^2}{2} \cdot \lambda^2 + \bar{\sigma} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \lambda}; & c > 0; \quad \lambda \in \mathbb{R}; \\ g(\lambda, c, x)|_{c=0} = e^{i\lambda \cdot x}, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln g}{\partial c} = -\frac{m^2}{2} \cdot \lambda^2 + \bar{\sigma} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \ln g}{\partial \lambda}; & c > 0; \quad \lambda \in \mathbb{R}; \\ \ln g(\lambda, c, x)|_{c=0} = i \cdot \lambda \cdot x. \end{cases}$$

Применив *интегральное преобразование Лапласа* по переменному ρ , приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка относительно *изображения* по Лапласу $E(\lambda, s, x)$ функции $\ln g(\lambda, \rho, x)$:

$$\beta \cdot \lambda \cdot \frac{\partial E}{\partial \lambda} - s \cdot E = \frac{m^2 \cdot \lambda^2}{2 \cdot s} - i \cdot \lambda \cdot x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

которое можно решить стандартными методами. Из свойств условной функции плотности вероятностей $f(t, x, \tau, y)$ и связи между характеристической функцией $g(\lambda, \rho, x)$ и функцией $f(t, x, \tau, y)$ следует, что

$$g(0, \rho, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, \tau, y) \cdot dy \equiv 1.$$

Поэтому

$$\ln g(0, \rho, x) \equiv 0, \quad E(0, s, x) \equiv 0$$

и

$$E(\lambda, s, x) = -\frac{m^2}{2 \cdot s \cdot (s - 2 \cdot \alpha)} \cdot \lambda^2 + \frac{i \cdot x}{s - \alpha} \cdot \lambda.$$

По изображению E находим *оригинал* $\ln g$:

$$\ln g(\lambda, \rho, x) = i \cdot \lambda \cdot x \cdot e^{-\alpha \cdot \rho} - \frac{\lambda^2 \cdot m^2}{4 \cdot \alpha} \cdot (1 - e^{-2 \cdot \alpha \cdot \rho}).$$

Теперь достаточно записать выражение для характеристической функции $g(\lambda, \rho, x)$ и при помощи обратного экспоненциального преобразования Фурье перейти к условной функции плотности вероятностей $f(t, x, \tau, y)$. Но обратим внимание на то, что в правой части полученного равенства записан натуральный логарифм характеристической функции для нормального распределения с *математическим ожиданием* $x \cdot e^{-\alpha \cdot \rho}$ и *дисперсией* $(m^2/2 \cdot \alpha)(1 - e^{-2 \cdot \alpha \cdot \rho})$. Поэтому с учетом обозначения $\rho \in \tau - t$ получаем

$$f(t, x, \phi, y) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2(\tau - t)}} \cdot \exp\left(-\frac{[y - m(x, \tau - t)]^2}{2 \cdot \sigma^2(\tau - t)}\right),$$

где

$$m(x, \tau - t) = x \cdot e^{-\alpha(\tau - t)}, \quad \sigma^2(\tau - t) = \frac{m^2}{2 \cdot \alpha} \cdot (1 - e^{2 \cdot \alpha(\tau - t)}).$$

6.2.5. Три характерные задачи теории марковских случайных процессов с непрерывными состояниями

В практике прикладных исследований встречаются задачи, для корректного решения которых аппарат корреляционной теории *случайных процессов* недостаточен. К подобным задачам в первую очередь относятся задачи определения вероятности выброса значений случайного процесса за пределы заданной области и задачи определения *закона распределения* времени этого выброса. Решение этих задач для случайных процессов произвольного типа связано с преодолением значительных трудностей принципиального характера. Но если случайный *процесс является марковским*, то решения удастся получить относительно просто.

Вероятность пребывания марковского случайного процесса в заданной области. Простейшей задачей данного класса является вычисление *вероятности* того, что скалярный случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [a, b]$ в течение интервала времени $(t, t + \Delta) \in T$ удовлетворяет неравенству

$$u_1 < \xi(t, \omega) < u_2, \quad (73)$$

где u_1 и u_2 заданы.

Определение вероятности пребывания значений случайного процесса в заданной области необходимо при решении многих прикладных задач. В частности, к ним относятся задачи теории надежности, в которых для нормального функционирования изучаемой системы нужно, чтобы

параметры, характеризующие систему во время ее работы, не выходили за некоторые допустимые пределы.

Рассмотрим решение подобных задач для скалярного марковского процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$. Пусть значения изучаемого случайного процесса в интервале времени $(t, \tau) \in T$ ни разу не вышли за границы области, определенной неравенствами (73), а вероятность того, что в момент времени $\tau \in T$ его значения будут находиться в интервале $(y, y + dy)$, с точностью до $o(dy)$ равна $W(\tau, y) \cdot dy$. Очевидно, что $W(\tau, y)$ – это *условная функция плотности вероятностей*, а искомая вероятность $P(\tau)$ того, что граница области к моменту времени $\tau = t + \Delta$ не будет достигнута, определяется равенством

$$P(\tau) = \int_{u_1}^{u_2} W(\tau, y) \cdot dy. \quad (74)$$

Если условие (73) выполнено, то функция $W(\tau, y)$, будучи условной функцией плотности вероятностей скалярного марковского процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, удовлетворяет *второму уравнению Колмогорова*, то есть

$$\frac{\partial W(\tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(a(y, \tau) \cdot W(\tau, y)) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(b(y, \tau) \cdot W(\tau, y)) = 0, \quad (75)$$

при $u_1 < y < u_2$. Нарушение условия (73) связано с моментом, когда значение случайного процесса достигнет ("коснется") границы, то есть при $y = u_1$ или $y = u_2$. В этом случае попадание значений случайного процесса в интервал $(y, y + dy)$ без достижения границ становится невозможным, и для любого $\tau \in T$ условная функция плотности вероятностей равна $W(\tau, y) \equiv 0$, то есть имеют место *граничные условия*

$$W(\tau, u_1) \equiv 0, \quad W(\tau, u_2) \equiv 0, \quad \tau > t. \quad (76)$$

Если *начальные условия* для $W(\tau, y)$ заданы равенствами (66) или (67), то исходная задача может быть сведена к смешанной задаче для уравнения

Колмогорова (75) с граничными условиями (76) и начальными условиями (66) или (67).

Пусть $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ – скалярный марковский процесс, определенный в параграфе 4.4. Найдем вероятность того, что в течение времени τ значения рассматриваемого случайного процесса не выйдут за пределы $\pm h$, если

$$\xi(0, \omega) \equiv 0.$$

В соответствии с результатами, предыдущего параграфа, приходим к смешанной задаче (75), (76), (66) для уравнения Колмогорова, решением которой является функция плотности вероятностей $W(\tau, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial W(\phi, y)}{\partial \phi} = \frac{m^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 W(\phi, y)}{\partial y^2} + \phi \cdot \frac{\partial (y \cdot W(\phi, y))}{\partial y}; & \phi > 0; \quad |y| > h; \\ W(\phi, y) = d(y); \\ W(\phi, -h) = W(\phi, h) = 0 \end{cases} \quad (77)$$

Для решения задачи (77) можно воспользоваться методом Фурье разделения переменных. В этом случае

$$W(\tau, y) = A(\tau) \cdot B(y),$$

где функция $B(y)$ является решением задачи Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} B''(y) + 2 \cdot m^{-2} \cdot [y \cdot B(y)]' + \lambda^2 \cdot B(y) = 0, & |y| > h, \\ B(-h) = B(h) = 0, \end{cases} \quad (78)$$

а функция $A(\tau)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$A'(\tau) + \frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot \lambda^2 \cdot A(\tau) = 0, \quad \tau > 0. \quad (79)$$

Как известно, ортонормированная система решений задачи Штурма – Лиувилля (78) может быть представлена в виде

$$B_k(y) = c_k \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{2 \cdot m^2} \cdot y^2\right) \cdot D_{\nu k}\left(\frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{m} \cdot y\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $D_\nu(z)$ – функция параболического цилиндра (функция Вебера – Эрмита);
 $\nu_k = m^2 \cdot \lambda_k^2 / \alpha$ – порядок функции параболического цилиндра, определяемый из уравнения

$$D_\nu\left(\frac{2 \cdot \alpha}{m} \cdot h\right) = 0;$$

c_k – нормирующий множитель, который можно вычислить по формуле

$$c_k = \left(\int_{-h}^h D_{\nu k}^2 \left(\frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{m} \cdot y \right) \cdot dy \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Используя свойство ортонормированности системы функций $\{B_k(y)\}$ с весом $\rho(y) = \exp(\alpha \cdot m^{-2} \cdot y^2)$ и равенства $D_\nu(0) = 1$, получим разложение

$$W(0, y) = \delta(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\delta(y), B_k(y)) \cdot B_k(y),$$

где

$$(\delta(y), B_k(y)) = \int_{-h}^h \exp\left(\frac{\alpha}{m^2} \cdot y^2\right) \cdot c_k \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{m^2} \cdot y^2\right) \cdot D_{\nu k}\left(\frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{m} \cdot y\right) \cdot dy \equiv c_k,$$

Таким образом, если $\lambda^2 = \lambda_k^2 \equiv \alpha \cdot \nu_k / m^2$, то решение уравнения (79) имеет вид $A_k(\tau) = c_k \cdot \exp(-0.5 \cdot \alpha \cdot \nu_k \cdot \tau)$ и можно записать разложение для условной функции плотности вероятностей

$$W(\tau, k) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\tau) \cdot B_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \nu_k \cdot \tau}{2} - \frac{\alpha \cdot y^2}{2 \cdot m^2}\right) \cdot D_{\nu k}\left(\frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{m} \cdot y\right).$$

Для получения окончательного результата достаточно воспользоваться (74) при $u_1 = -h$ и $u_2 = h$:

$$P(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \nu_k \cdot \tau}{2}\right) \cdot \int_{-h}^h \exp\left(\frac{\alpha \cdot y^2}{2 \cdot m^2}\right) \cdot D_{\nu k}\left(\frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{m} \cdot y\right) \cdot dy,$$

где $\nu_k, k = 1, 2, \dots$ – корни уравнения $D_\nu\left(\frac{\sqrt{2 \cdot \alpha} \cdot h}{m}\right) = 0$;

$$c_k = \left(\int_{-h}^h D_{vk}^2 \left(\frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{m} \cdot y \right) \cdot dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ – n -мерный марковский процесс, то можно рассматривать различные постановки задач о вероятности пребывания его значений в заданной области $G \subset R^n$. Эти различия главным образом связаны с видом области G , а основная идея решения исходной задачи практически та же, что и в скалярном случае.

Действительно, пусть к моменту времени $\tau \in T$ значение n -мерного марковского процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ ни разу не пересекало границы Γ_G области $G \subset R^n$, а вероятность того, что в момент времени τ значение случайного процесса попадает в n -мерный интервал $(Y, Y + dY)$. То есть для любого $k = \overline{1, n}$ вероятность попадания его k -ой компоненты в интервал $(y_k, y_k + dy_k)$, с точностью $o(\|dY\|)$ равна $W(\tau, Y) \cdot dY$. Тогда, рассуждая так же, как и в скалярном случае, приходим к выводу, что функция $W(\tau, Y)$ удовлетворяет второму уравнению Колмогорова, граничным условиям

$$W(\tau, Y)|_{Y \in \Gamma_G} = 0,$$

одному из начальных условий (66) или (67), а искомая вероятность $P(\tau)$ того, что граница области не достигнута, равна

$$P(\tau) = \int_G W(\tau, Y) \cdot dY.$$

Закон распределения времени пребывания марковского процесса в заданной области. Пусть $f_p(z)$ – *функция плотности вероятностей* времени пребывания скалярного марковского процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ в заданной области, определенной неравенствами (73). Если к моменту времени τ значения рассматриваемого случайного процесса еще ни разу не достигали границ области, то время ρ их пребывания в допустимой области будет не менее, чем $(\tau - t)$. Вероятность реализации этого события равна

$$\int_{\tau-t}^{\infty} f_p(z) \cdot dz.$$

С другой стороны, эта же вероятность определена равенством (74), то есть

$$\int_{\tau-t}^{\infty} f_p(z) \cdot dz = \int_{u_1}^{u_2} W(\tau, y) \cdot dy$$

Таким образом,

$$f_p(z) = -P'(\tau) \Big|_{\tau=t+z} = - \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial W(\tau, y)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t+z} \cdot dy. \quad (80)$$

Сформулируем теперь вводные положения.

1 Если за начальный момент времени взят момент пересечения значениями случайного процесса границы допустимой области, то функция $f_p(z)$, определяемая равенством (80), устанавливает закон распределения времени пребывания значений этого случайного процесса в допустимой области от момента входа в нее и до момента выхода.

2 Если $u_2 = +\infty$, то функция $f_p(z)$ устанавливает закон распределения времени выброса значений рассматриваемого случайного процесса за уровень u_1 "снизу вверх".

3 Если функция $f_p(z)$ плотности вероятностей времени пребывания значений скалярного марковского процесса $\xi(t, \omega)$ в допустимой области определена, то *математическое ожидание* этого времени пребывания равно

$$\bar{\rho} = \int_0^{\infty} z \cdot f_p(z) \cdot dz = \int_t^{\infty} P(\tau) \cdot d\tau. \quad (81)$$

Выражение в правой части (81) отвечает определению математического ожидания, если для функции плотности вероятностей $f_p(z)$ воспользоваться представлением (80) с последующим интегрированием по частям.

4 Если в уравнениях Колмогорова, соответствующих рассматриваемому скалярному марковскому процессу $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ *коэффициенты сноса и диффузии* не зависят от времени, то есть

$$a(x, t) \equiv a(x), \quad b(x, t) \equiv b(x),$$

то математическое ожидание \bar{p} можно определить, не используя (81). Действительно, в этом случае условная функция плотности вероятностей $W(\tau, y)$ будет зависеть не от t и τ , а от разности $\tau - t$. Поэтому

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial \tau}.$$

До того момента, когда значения случайного процесса $\xi(\tau, \omega)$, $t \in T$ достигают границы допустимой области, функция $W(t, x)$ является решением первого уравнения Колмогорова:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a(x) \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot b(x) \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

Заменив в этом уравнении W'_t на $-W'_\tau$ и проинтегрировав его по переменной y в пределах от u_1 до u_2 с учетом равенства (74) приходим к дифференциальному уравнению в частных производных относительно $P(\tau)$:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = a(x) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot b(x) \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

Так как, согласно определению вероятности $P(\tau)$, имеют место равенства

$$P(t) = 1, \quad P(\infty) = 0,$$

то после интегрирования этого уравнения по τ в пределах от t до $+\infty$ в соответствии с равенством (81) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно $\bar{p} = \bar{p}(x)$:

$$\frac{1}{2} \cdot b(x) \cdot \bar{p}''(x) + a(x) \cdot \bar{p}'(x) + 1 = 0, \quad u_1 < x < u_2, \quad (82)$$

дополняемому очевидными краевыми условиями

$$\bar{p}(u_1) = \bar{p}(u_2) = 0, \quad (83)$$

В условиях примера из предыдущего раздела примем коэффициент диффузии равным $b(x) \equiv m^2$, а коэффициент сноса $a(x) = -\alpha \cdot x$. Тогда краевая задача (82), (83) относительно $\bar{p}(x)$ примет следующий вид:

$$-\frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot \bar{\rho}''(x) - \alpha \cdot x \cdot \bar{\rho}'(x) + 1 = 0, \quad |x| < h,$$

$$\bar{\rho}(-h) = \bar{\rho}(h) = 0.$$

Понизив порядок уравнения, без особых трудностей находим значение математического ожидания времени пребывания значений исходного случайного процесса в пределах $\pm h$ в зависимости от его начального значения x :

$$\bar{\rho}(x) = \frac{2}{m^2} \cdot \int_{-h}^x \left(C - \int_{-h}^z \exp\left(-\frac{\alpha \cdot z^2}{m^2}\right) \cdot dz \right) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot y^2}{m^2}\right) \cdot dy,$$

$$C = \frac{1}{\int_{-h}^h \exp\left(-\frac{\alpha \cdot y^2}{m^2}\right) \cdot dy} \cdot \int_{-h}^h \int_{-h}^y \exp\left(\frac{\alpha}{m^2} \cdot (y^2 - z^2)\right) \cdot dz \cdot dy.$$

Отметим, что (80), (81) справедливы и для векторных марковских процессов.

Среднее число выбросов значений марковского процесса за данный уровень. Задача определения среднего числа выбросов значений марковского процесса за данный уровень в единицу времени, для каждого из которых время пребывания вне допустимой области больше заданного значения ρ_0 , сводится к решению соответствующих задач для уравнений Колмогорова. При этом логика решения исходной задачи аналогична логике решения задачи об определении вероятности пребывания значений марковского процесса в заданной области.

Рассмотрим временной интервал $(t, t + \Delta t) \in T$, в течение которого значения марковского скалярного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ пересекли уровень $u = u_2$. При этом условии вероятность того, что к моменту времени $(t, \tau) \in T$ значения изучаемого случайного процесса принадлежат интервалу $(y, y + dy)$ и ни разу за промежуток времени (t, τ) не опускаются ниже уровня $u = u_2$, представим в виде произведения $v(\tau, y)\Delta$. Это представление верно с точностью $o(\Delta)$. А так как длина Δ временного интервала $(t, t + \Delta)$ не зависит

ни от τ , ни от y , то функция $v(\tau, y)$ должна удовлетворять второму уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial v(\tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(a(y, \tau) \cdot v(\tau, y)) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(b(y, \tau) \cdot v(\tau, y)) = 0. \quad (84)$$

Начальное и граничные условия для уравнения (84) должны отражать два обстоятельства:

1) для моментов времени, предшествующих t , значения случайного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ находятся ниже уровня $y = u_2$;

2) в некоторый момент времени из интервала $(t, t + \Delta)$ значения случайного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ пересекают уровень $y = u_2$.

Из первого условия следует, что

$$v(\tau, y)|_{\tau < t} \equiv 0, \quad (85)$$

так как для моментов времени, предшествующих t , значения случайного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ не могут быть больше, чем u_2 , ни разу не опускаясь ниже этого уровня, поскольку предполагается наличие выброса в окрестности значения t .

Так как время выброса точно не известно, а известно лишь, что выброс произошел в интервале времени $(t, t + \Delta)$, то второе условие означает, что интеграл от $v(\tau, y)\Delta$ по переменному τ в пределах от t до $t + \Delta$ при $y = u_2$ должен определять вероятность попадания значений случайного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ в окрестность значения u_2 . Таким образом,

$$v(\tau, u_2)\Delta = \delta(\tau - t) \cdot f(t, u_2)\Delta$$

и окончательно

$$v(\tau, u_2) = \delta(\tau - t) \cdot f(t, u_2), \quad (86)$$

где $f(t, x)$ – функция плотности вероятностей случайной величины $\xi(t, \omega)$ в заданный момент времени t . Условия (85), (86) полностью определяют частное решение уравнения (84).

Число выбросов $n(u_2, \rho_0)\Delta$, длительность которых не меньше заданной величины ρ_0 и которые происходят в среднем в течение интервала времени $(t, t + \Delta)$, равно вероятности того, что выброс, начавшийся в интервале $(t, t + \Delta)$, не закончится к моменту $\tau = t + \Delta$. А так как *условная вероятность реализации этого случайного события* в принятых обозначениях равна

$$\Delta \int_{u_2}^{\infty} v(\rho_0, y) \cdot dy,$$

то окончательное решение исходной задачи имеет вид

$$n(u_2, \rho_0) = \int_{u_2}^{\infty} v(\rho_0, y) \cdot dy. \quad (87)$$

В заключение отметим следующее.

1 Введем в рассмотрение функцию $u(\tau, u_2)$, определяемую равенством $v(\tau, y) = f(t, u_2) \cdot u(\tau, y)$.

Тогда из (84) – (87) следует, что

$$\begin{cases} n(u_2, \rho_0) = f(t, u_2) \cdot \int_{u_2}^{\infty} u(\rho_0, y) \cdot dy, \\ \frac{\partial u(\tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} (a(y, \tau) \cdot u(y, \tau)) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(y, \tau) \cdot u(y, \tau)) = 0, \\ u_2 < y < \infty, u(\phi, y)|_{\phi < t} = 0, u(\phi, y)|_{\phi \geq t} = \delta(\tau - t) \end{cases} \quad (88)$$

На практике при определении среднего числа выбросов марковского процесса за заданный уровень удобно представлять исходную задачу в виде (88), так как в таком виде легче обеспечить численное решение.

2 Если исходный *случайный процесс* является *стационарным в широком смысле*, то

$$f(\tau, y) \equiv f(y), \quad a(\tau, y) \equiv a(y), \quad b(\tau, y) \equiv b(y) \quad (89)$$

и функция $f(y)$ должна удовлетворять второму уравнению Колмогорова, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial y}(a(y) \cdot f(y)) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(b(y) \cdot f(y)) = 0, \quad (90)$$

а также стандартному свойству функции плотности вероятностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot dy = 1$$

и граничным условиям (68) в виде

$$\left. \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(b(y) \cdot f(y)) - a(y) \cdot f(y) \right|_{y \in \{\alpha, \beta\}} = 0. \quad (91)$$

Здесь $\Gamma_G = \{\alpha, \beta\}$ – множество граничных точек области G изменения значений рассматриваемого случайного процесса, представляющее собой конечный или бесконечный интервал (α, β) . Интегрируя правую и левую части уравнения (91) по y в пределах от $\alpha = -\infty$ до $y \in G$ с учетом граничного условия (91) при $y = \alpha$, приходим к следующей задаче относительно функции $f(y)$:

$$\begin{cases} b(y) \cdot f'(y) + (b'(y) - 2 \cdot a(y)) \cdot f(y) = 0; \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(y) \cdot dy = 1 \end{cases} \quad (92)$$

3 Пусть исходный случайный процесс является стационарным в широком смысле и $U(s, y) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot (\tau - t)} \cdot u(\tau, y) \cdot d\tau$ – изображение по Лапласу для оригинала $u(\tau, y)$. В соответствии с (88) и (89) функция $U(s, y)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(b(y) \cdot U(s, y)) - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(a(y) \cdot U(s, y)) - 2 \cdot s \cdot U(s, y) = 0, \\ u_2 < y < \infty, \quad U(s, u_2) = 1, \quad U(s, \infty) \equiv 0 \end{cases} \quad (93)$$

где условие $U(s, \infty) = 0$ соответствует граничному условию (71). Кроме того, если

$$N(u_2, s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot (\tau - t)} \cdot n(u_2, \tau) \cdot d\tau,$$

то из первого уравнения (88) следует, что

$$N(u_2, s) = f(u_2) \cdot \int_{u_2}^{\infty} U(s, y) \cdot dy.$$

Интегрируя уравнение (93) по y в пределах от u_2 до $+\infty$, получаем

$$\int_{u_2}^{\infty} U(s, y) \cdot dy = \left(\frac{1}{s} \cdot a(y) - \frac{1}{2 \cdot s} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (b(y) \cdot U(s, y)) \right) \Bigg|_{y=u_2},$$

так как по условию $U(s, \infty) = 0$. Таким образом,

$$N(u_2, s) = f(u_2) \cdot \left(\frac{1}{s} \cdot a(y) - \frac{1}{2 \cdot s} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (b(y) \cdot U(s, y)) \right) \Bigg|_{y=u_2} \quad (94)$$

и для того, чтобы найти среднее число выбросов значений марковского процесса за уровень $y = u_2$ в единицу времени, каждый из которых имеет длительность более заданного значения ρ_0 , достаточно обратить интегральное преобразование Лапласа.

Для случайного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, определенного в примере из параграфа 6.2.4, найдем среднее число выбросов $n(0, \rho_0)$ за нулевой уровень, длительность которых превосходит ρ_0 .

В рассматриваемом случае

$$a(y, \tau) \equiv -\alpha \cdot y, \quad b(y, \tau) \equiv m^2.$$

Согласно (92),

$$m^2 \cdot f''(y) + 2 \cdot \alpha \cdot y \cdot f(y) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot dy = 1.$$

Следовательно,

$$f(y) = \frac{\sqrt{\alpha}}{m \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot y^2}{m^2}\right)$$

является функцией плотности вероятностей нормального закона распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = m^2/(2\alpha)$. А так как по условию $u_2 = 0$, то

$$f(u_2) = f(0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi \cdot m_2}}.$$

В соответствии с (93) изображение по Лапласу $U(s, y)$ функции $u(\tau, y)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(s, y)}{\partial y^2} + \frac{2 \cdot \sigma \cdot y}{m^2} \cdot \frac{\partial U(s, y)}{\partial y} + \frac{2 \cdot \sigma - 2 \cdot s}{m^2} \cdot U(s, y) = 0, & y > 0, \\ U(s, 0) = 1, & U(s, \infty) = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$N(0, s) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{D_{-\frac{s}{\alpha}-1}(0)}{D_{-\frac{s}{\alpha}}(0)},$$

Подставив полученные результаты в (94), с учетом свойств функции параболического цилиндра найдем

$$n(0, \rho_0) = \frac{\alpha \cdot e^{-2 \cdot \tau}}{\pi \cdot \sqrt{1 - e^{-2 \cdot \alpha \cdot \tau}}} \Big|_{\tau=\rho_0}.$$

4 Все полученные результаты могут быть обобщены и на случай n -мерного марковского процесса.

6.2.6 Динамическое программирование

Метод динамического программирования представляет собой способ решения вариационных задач с ограничениями на управление и на фазовые координаты объекта. В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом. В нем используется свойство независимости будущего от прошлого состояния системы. Этот принцип применительно к динамическим системам

формулируется следующим образом /8/. *Оптимальное управление (поведение) определяется лишь целью и состоянием системы в рассматриваемый момент времени и не зависит от состояний в предыдущие моменты времени.*

Из сформулированного принципа оптимальности следует, что в текущем состоянии системы и поставленной цели заключена вся информация, необходимая для определения дальнейшего оптимального управления. Использование принципа оптимальности позволяет построить алгоритм определения оптимального управления в динамической системе, т. е. развить так называемый *метод динамического программирования*.

Для изложения метода динамического программирования применительно к непрерывным системам и процессам в них рассмотрим внутри интервала (t_0, t_k) момент времени t такой, что $t_0 \leq t \leq t_k$, и введем функционал потерь вида

$$I(t, Y, u, t_k) = l_1(Y, t_k) + \int_t^{t_k} l_2(Y, u, \phi) d\zeta. \quad (95)$$

Этот функционал учитывает как потери в конечном состоянии системы, так и оставшиеся потери на интервале (t, t_k) . При этом на управление накладывается дополнительное ограничение

$$|u_i| \leq U_{0i}, (i = 1, r). \quad (95a)$$

В рассматриваемой стохастической задаче и при неточных измерениях вектора фазовых координат вся информация о состоянии объекта измерения содержится в апостериорной функции плотности вероятности $\phi_I^{(l)}(y, t)$ при наблюдении вектора $Z(t)$ в интервале (t_0, t) . Функционал потерь (95) является случайной величиной. Наилучшей оценкой его в смысле минимума средней квадратической ошибки при наблюдения вектора $Z(t)$ является условное математическое ожидание. Условное математическое ожидание функционала (95) зависит от указанной апостериорной функции плотности вероятности.

В методе динамического программирования важную роль играет функция Беллмана, связанная с условным математическим ожиданием функционала потерь. Введем эту функцию на основании формулы

$$S(\bar{t}, \mathfrak{G}_1^{(l)}(y, t)) = \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t, t_k)}} \{M_z[I(t, Y, u, t_k)]\}, \quad (96)$$

где

$$M_z[I(t, Y, u, t_k)] = M[I / Z(\tau), t_0 \leq \tau \leq t] = \int_{-\infty}^{\infty} I(t, y, u, t_k) \mathfrak{G}_1^{(l)}(y, t) dy. \quad (97)$$

Функция S представляет собой минимальное значение условного математического ожидания функционала потерь $I(t, Y, u, t_k)$ при наблюдении вектора $Z(t)$, полученное на множестве всех допустимых управлений $u(\tau)$ в интервале (t, t_k) .

Метод динамического программирования применительно к непрерывным динамическим системам, поведение которых описывается стохастическими уравнениями при неточных измерениях фазовых координат, содержится в следующей теореме.

Теорема 4.2. Для оптимального вектора управления, удовлетворяюще-го ограничению (95a), оптимального вектора состояния объекта, описываемого стохастическими уравнениями, и при наблюдении вектора $Z(t)$ в интервале (t_0, t_k) функционал

$$\mathfrak{F}_0 = M_z[I_0] = M[I_0'(t_0, Y, u, t_k) / Z(t), t_0 \leq \tau \leq t_k]$$

имеет минимальное значение, а функция S удовлетворяет функциональному уравнению Беллмана

$$\min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t_0, t_k)}} \{KS(t, \mathfrak{G}_1^{(l)}(y, t)) + M_z[l_2(Y, u, t)]\} = 0, \quad (98)$$

где

$$KS = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_z[S(t + \Delta t, \mathfrak{G}_1^{(l)}(y, t + \Delta t))] - S(t, \mathfrak{G}_1^{(l)}(y, t))}{\Delta t}. \quad (99)$$

Выражение KS при существовании соответствующего предела можно рассматривать как производную от условного математического ожидания функционала. Функциональное уравнение Беллмана (98) является общим соотношением, решающим поставленную задачу оптимизации функционала (95) и определения оптимального управления.

Приведем доказательство этой теоремы, опираясь на доказательство, полученное в /9/ для детерминированной задачи оптимизации.

Рассмотрим интервал времени (t, t_k) , где $t_0 \leq t \leq t_k$. По определению оптимальное управление на этом интервале доставляет минимум функционалу $M_z[I(t, Y, u, t_k)]$

$$S(t, \phi_I^{(l)}(y, t)) = \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t, t_k)}} \left\{ M_z \left[l_1(Y, t_k) + \int_t^{t_k} l_2(Y, u, \tau) d\tau \right] \right\}. \quad (100)$$

Пользуясь аддитивностью интегралов для интервалов времени $t \leq t + \Delta t \leq t_k$, перепишем формулу (100) в виде

$$S(t, \phi_I^{(l)}(y, t)) = \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t, t_k)}} \left\{ M_z [l_1(Y, t_k)] + M_z \left[\int_t^{t+\Delta t} l_2(Y, u, \tau) d\tau \right] + M_z \left[\int_{t+\Delta t}^{t_k} l_2(Y, u, \tau) d\tau \right] \right\} \quad (101)$$

Применим сформулированный принцип оптимальности к выражению (101). На основании этого принципа оптимальное управление u для системы на интервале (t, t_k) обладает следующим свойством: для любого момента времени $t + \Delta t$, заключенного в интервале $t \leq t + \Delta t \leq t_k$, управление должно быть оптимальным относительно состояния $Y_{t+\Delta t}$ независимо от значений, которое оно принимало на предшествующем интервале $(t, t + \Delta t)$. На основании этого запишем

$$S(t, \phi_I^{(l)}(y, t)) = \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t, t_k)}} \left\{ M_{z_t} \left[\int_t^{t+\Delta t} l_2(Y, u, \tau) d\tau \right] + M_{z_t} [S(t + \Delta t, \phi_I^{(l)}(y, t + \Delta t))] \right\} \quad (102)$$

где

$$S(t + \Delta t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t + \Delta t)) = \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t + \Delta t, t_k)}} \{M_{z_{t+\Delta t}}[I(t + \Delta t, Y, u, t_k)]\}.$$

Предположим, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ управление $u(\tau)$ выбрано оптимальным. Тогда (102) можно записать без знака \min :

$$S(t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)) = M_{z_t} \left[\int_t^{t+\Delta t} l_2(Y, u, \tau) d\tau \right] + M_{z_t} [S(t + \Delta t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t + \Delta t))].$$

Перепишем эту формулу так:

$$\frac{M_{z_t} [S(t + \Delta t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t + \Delta t)) - S(t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t))]}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta t} M_{z_t} \left[\int_t^{t+\Delta t} l_2(Y, u, \tau) d\tau \right]. \quad (103)$$

В полученном выражении перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{M_{z_t} [S(t + \Delta t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t + \Delta t)) - S(t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t))]\} = KS(t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)),$$

то, применяя теорему о среднем в правой части, получим

$$KS(t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)) + M_z [l_2(Y, u, t)] = 0. \quad (104)$$

Если предположить, что управление u^* на интервале $(t, t + \Delta t)$ выбрано неоптимальным, то это означает неоптимальность управления на интервале (t, t_k) . Тогда для оптимальной оценки справедлива формула

$$S(t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)) \leq M_{z_t} \left[\int_t^{t+\Delta t} l_2(Y, u^*, \tau) d\tau \right] + M_{z_t} [S(t + \Delta t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t + \Delta t))].$$

Перепишем это выражение в форме

$$\frac{M_{z_t} [S(t + \Delta t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t + \Delta t)) - S(t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t))]}{\Delta t} \geq -\frac{1}{\Delta t} M_{z_t} \left[\int_t^{t+\Delta t} l_2(Y, u^*, \tau) d\tau \right]$$

Перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. В результате получим для неоптимального управления следующее неравенство:

$$KS(t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)) + M_z [l_2(Y, u^*, t)] \geq 0. \quad (105)$$

Из выражений (124) и (125) следует, что минимальное значение левой части достигается при оптимальном управлении и оно равно нулю, то есть

$$\min_{\substack{u(t) \in U_0 \\ t \in (t_0, t_k)}} \{KS(t, \mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)) + M_z[l_2(Y, u_t, t)]\} = 0. \quad (106)$$

Уравнение (104) справедливо для любого произвольного момента времени t из интервала (t_0, t_k) . Опуская индекс t у переменных u в (104), получим функциональное уравнение (98).

Поскольку, как уже указывалось, в стохастической задаче и при неточных измерениях информация о состоянии объекта содержится в апостериорной функции плотности вероятности $\mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)$, оптимальное управление, удовлетворяющее (98), является функционалом от $\mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)$. Это обуславливает сложность решения задачи оптимизации на основании уравнений (98).

Практический путь решения данной задачи состоит в приближенном представлении функции апостериорной плотности вероятности $\mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)$, основанном на использовании достаточных координат (достаточной статистики) [10]. Предполагается, что достаточные координаты с необходимой точностью описывают состояние и эволюцию рассматриваемой системы. Во многих задачах за достаточные координаты принимаются апостериорные оценки вектора состояния $\mathfrak{F}^{(l)}$ и корреляционная матрица $R^{(l)}(t)$ (гауссово приближение). При более точном представлении надо еще учесть моменты более высоких порядков. Следует при этом отметить, что матрица $R^{(l)}(t)$ и моменты более высоких порядков не зависят от u . Тогда приближенно можно считать, что функция Беллмана в стохастической задаче есть функция величин t и $\mathfrak{F}^{(l)}(t)$. Сохраним для нее то же самое обозначение (96), но в каждом конкретном случае вид ее будет различным, зависящим от принятой аппроксимации функций $\mathfrak{G}_I^{(l)}(y, t)$:

$$S(\bar{t}, \mathfrak{F}^{(l)}) = \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t_0, t_k)}} \{M_z[I(t, Y, u, t_k)]\}. \quad (107)$$

Эта функция характеризует средние оставшиеся потери на интервале (t, t_k) и удовлетворяет уравнению типа (98).

Если функция $S(\bar{t}, \mathbf{F}^{(l)})$ обладает непрерывными частными производными по переменным t и $\mathbf{F}^{(l)}$ и второй производной по $\mathbf{F}^{(l)}$, то уравнение (98) можно преобразовать к другой форме. Для этого воспользуемся формулой (102) и применим ее к функции $S(\bar{t}, \mathbf{F}^{(l)})$

$$S(\bar{t}, \mathbf{F}_t^{(l)}) = \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t_0, t_k)}} \left\{ M_{z_t} \left[\int_t^{t+\Delta t} l_2(Y, u, \tau) d\tau \right] + M_{z_t} [S(t + \Delta t, \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{(l)})] \right\}. \quad (108)$$

где

$$M_{z_t} [S] = M [S(t + \Delta t, \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{(l)}) / Z(\tau), t_0 \leq \tau \leq t].$$

Представим функцию $S(t + \Delta t, \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{(l)})$ рядом Тейлора в окрестности точки $\mathbf{F}_t^{(l)}$. Эта функция является случайной при измерении $Z(\tau)$ в интервале $t_0 \leq \tau \leq t$ и потому может быть выражена через случайные приращения ΔY на интервале $(t, t + \Delta t)$

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t, \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{(l)}) &= S(t + \Delta t, \mathbf{F}_t^{(l)}) + \frac{\partial S(t + \Delta t, \mathbf{F}_t^{(l)})}{\partial \mathbf{F}^{(l)}} \Delta Y + \\ &+ \frac{1}{2} tr \left[\frac{\partial^2 S(t + \Delta t, \mathbf{F}_t^{(l)})}{\partial \mathbf{F}^{(l)} \partial \mathbf{F}^{(l)T}} (\Delta Y \cdot \Delta Y^T) \right] + o(\Delta Y) \end{aligned} \quad (109)$$

где $o(\Delta Y)$ – величина, имеющая порядок более второго относительно ΔY .

Вычислим условное математическое ожидание $M_{z_t} [\cdot]$ от функции $S(t + \Delta t, \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{(l)})$, используя формулу (109) и учитывая, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ процесс $Y(t)$ описывается уравнением (45)

$$\begin{aligned} M_{z_t} [S(t + \Delta t, \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{(l)})] &= S(t + \Delta t, \mathbf{F}_t^{(l)}) + \frac{\partial S(t + \Delta t, \mathbf{F}_t^{(l)})}{\partial \mathbf{F}^{(l)}} \mathbf{A}^{(l)}(\mathbf{F}^{(l)}, t) \Delta t + \\ &+ \frac{1}{2} tr \left[\frac{\partial^2 S(t + \Delta t, \mathbf{F}_t^{(l)})}{\partial \mathbf{F}^{(l)} \partial \mathbf{F}^{(l)T}} \mathbf{B}^{(l)}(\mathbf{F}^{(l)}, t) \right] \Delta t + M_{z_t} [o(\Delta Y)] \end{aligned} \quad (110)$$

где $A^{(l)}(Y^{(l)}, t)$ – вектор коэффициентов сноса, $B^{(l)}(Y^{(l)}, t)$ – матрица диффузии для динамической системы при наблюдении вектора $Z(\tau)$ в интервале (t_0, t) ,

$$A^{(l)}(Y^{(l)}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M_{z_t}(\Delta Y) = D^{(l)}(t) \varphi^{(l)}(Y^{(l)}, t) + \sigma^{(l)}(Y^{(l)}, t) u + \frac{\partial H^{(l)T}(Y^{(l)}, t)}{\partial Y^{(l)}} C(t) H^{(l)}(Y^{(l)}, t) \quad (111)$$

$$B^{(l)}(Y^{(l)}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M_{z_t}[\Delta Y \Delta Y^T] = H^{(l)}(Y^{(l)}, t) G(t) H^{(l)}(Y^{(l)}, t) \quad (112)$$

Подставим (110) в (108) и, учитывая, что $S(t + \Delta t, Y_t^{(l)})$ минимизировано по u , запишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{S(t + \Delta t, Y_t^{(l)}) - S(t, Y_t^{(l)})}{\Delta t} = & - \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t_0, t_k)}} \left\{ \frac{1}{\Delta t} M_{z_t} \left[\int_t^{t+\Delta t} l_2(Y, u, \tau) d\tau \right] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial S(t + \Delta t, Y_t^{(l)})}{\partial Y^{(l)}} \right]^T A^{(l)} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 S(t + \Delta t, Y_t^{(l)})}{\partial Y^{(l)} \partial Y^{(l)T}} B^{(l)} \right] + \frac{1}{\Delta t} M_{z_t} [o(\Delta Y)] \right\} \quad (113) \end{aligned}$$

где

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M_{z_t} [o(\Delta Y)] = 0.$$

Перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ в правой и левой частях равенства (113). В результате получим

$$\begin{aligned} - \frac{\partial S(t, Y_t^{(l)})}{\partial t} = & \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t_0, t_k)}} \left\{ M_{z_t} [l_2(Y, u, t)] + \left[\frac{\partial S(t, Y_t^{(l)})}{\partial Y^{(l)}} \right]^T A^{(l)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 S(t, Y_t^{(l)})}{\partial Y^{(l)} \partial Y^{(l)T}} B^{(l)} \right] \right\}. \quad (114) \end{aligned}$$

Учитывая, что t – произвольный момент времени в интервале (t_0, t_k) , окончательно запишем приближенное функциональное уравнение для функции Беллмана, опуская индекс t у функции и оператора, в виде

$$-\frac{\partial S(t, Y_t^{\epsilon^{(l)}})}{\partial t} = \min_{\substack{u(\tau) \in U_0 \\ \tau \in (t_0, t_k)}} \left\{ \left[\frac{\partial S(t, Y_t^{\epsilon^{(l)}})}{\partial Y^{\epsilon^{(l)}}} \right]^T A^{\epsilon^{(l)}} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 S(t, Y_t^{\epsilon^{(l)}})}{\partial Y^{\epsilon^{(l)}} \partial Y^{\epsilon^{(l)T}} B^{\epsilon^{(l)}} \right] + \right. \\ \left. + M_z[l_2(Y, u, t)] \right\}. \quad (115)$$

Таким образом, оператор K (99) производной от условного математического ожидания функционала, дважды дифференцируемого по Y и один раз по t , имеет выражение

$$KS(t, Y_t^{\epsilon^{(l)}}) = \frac{\partial S}{\partial t} + \left[\frac{\partial S}{\partial Y^{\epsilon^{(l)}}} \right]^T A^{\epsilon^{(l)}} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial Y^{\epsilon^{(l)}} \partial Y^{\epsilon^{(l)T}} B^{\epsilon^{(l)}} \right] \quad (116).$$

Граничное условие при решении функционального уравнения (115) вытекает из формул (95) и (107)

$$S(t_k, Y_{t_k}^{\epsilon^{(l)}}) = M[l_1(Y, t_k)]. \quad (117)$$

Уравнение (115) является частным случаем (98), также носит название *уравнения Беллмана* и доставляет необходимое условие оптимальности при оптимальном векторе управления u . Уравнение (115) отличается от обычного дифференциального уравнения наличием процедуры минимизации правой части по вектору управления u . Это обстоятельство определяет следующую процедуру его решения. Вектор u для каждого текущего момента времени определяется путем минимизации правой части уравнения (115). При этом он выражается через функцию S . Подставляя найденное выражение для u опять в правую часть формулы (115), получаем уже обычное уравнение в частных производных относительно функции S , в которое не входит u . Решив полученное уравнение относительно функции S , следует оценить ее вид. Эта функция доставляет решение для непрерывной системы только тогда, когда является кусочно-гладкой по отношению к Y, u, t .

Из изложенного в данном параграфе следует, что метод динамического программирования применительно к непрерывным динамическим системам приводит к необходимости решения своеобразного дифференциального уравнения в частных производных при заданном конечном условии. Здесь отсутствует двухточечная задача, которая характерна для принципа

максимума. Однако возникают свои трудности определения вида функции Беллмана S как решения указанного уравнения, отвечающего физическому характеру задачи.

Пусть объект управления имеет мультиструктуру со случайными переходами и описывается уравнениями

$$\dot{Y}_i = \sum_{j=1}^n d_{ij}^{(l)}(t) \cdot \varphi_j^{(l)}(Y, t) + V_i + u_i, \quad (i = \overline{1, n}; l = \overline{1, s}).$$

Требуется определить оптимальные управления u_i , удовлетворяющие ограничениям (95а) и минимизирующие функционал

$$J_0^{\epsilon} = M_z[l_1(Y, t)].$$

Для решения задачи методом динамического программирования составим уравнения Беллмана типа (115) для функции $S(t, Y^{\epsilon l})$, предварительно вычислив компоненты вектора сноса $A^{\epsilon l}$ и матрицы диффузии $B^{\epsilon l}$

$$A_i^{\epsilon l}(Y^{\epsilon l}, t) = \sum_{j=1}^n d_{ij}^{(l)}(t) \cdot \varphi_{j0}^{(l)}(Y^{\epsilon l}, t) + u_i$$

$$B_i^{\epsilon l}(Y^{\epsilon l}, t) = G_{ij}(t).$$

Уравнения Беллмана в предположении гауссовой аппроксимации функций распределения следующие:

$$-\frac{\partial S(t, Y^{\epsilon l})}{\partial t} = \min_{u_i \in U_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(t, Y^{\epsilon l})}{\partial Y_i^{\epsilon l}} \left(\sum_{j=1}^n d_{ij}^{(l)}(t) \varphi_{j0}^{(l)}(Y^{\epsilon l}, t) + u_i \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 S(t, Y^{\epsilon l})}{\partial Y_i^{\epsilon l} \partial Y_j^{\epsilon l}} G_{ij}(t) \right] \right\},$$

где

$$\varphi_{i0}^{(l)} = M_z[\varphi_i^{(l)}(Y, t)].$$

Минимизируя правую часть этого выражения по u_i с учетом ограничения (95а), получим оптимальные управления в виде

$$u_i^{(l)} = -u_i \operatorname{sgn} \frac{\partial S(t, Y^{\epsilon l})}{\partial Y_i^{\epsilon l}}, \quad (l = \overline{1, s}).$$

При оптимальных управлениях уравнения Беллмана для каждой структуры l принимают вид

$$-\frac{\partial S(t, \mathbf{Y}^{(l)})}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(t, \mathbf{Y}^{(l)})}{\partial Y_i^{(l)}} \left(\sum_{j=1}^n d_{ij}^{(l)}(t) \varphi_{j0}^{(l)}(\mathbf{Y}^{(l)}, t) - u_{i0} \operatorname{sgn} \left[\frac{\partial S(t, \mathbf{Y}^{(l)})}{\partial Y_i^{(l)}} \right] \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 S(t, \mathbf{Y}^{(l)})}{\partial Y_i^{(l)} \partial Y_j^{(l)}} G_{ij}(t), \quad (l = \overline{1, s}).$$

Решение этих уравнений следует отыскивать при конечном условии

$$S(t_k, \mathbf{Y}^{(l)}) = M[l_1(Y, t_k)].$$

Как видим, при применении метода динамического программирования двухточечной задачи не возникает. Кроме того, вследствие допущения о гауссовом сигнале отдельно может быть решена задача определения оптимального управления и получения оценок $\mathbf{Y}^{(l)}$. Последние получаются на основании алгоритмов фильтрации. После построения решения следует проверить его на оптимальность.

6.2.7 Метод функции Ляпунова

Вариационные методы, как уже указывалось, являются основой оптимизации динамических систем, поскольку они дают возможность получить аналитическую структуру закона управления. Метод функции Ляпунова относится к прямым вариационным методам. Он состоит в применении для синтеза управления производящей функции, являющейся оптимальной функцией Ляпунова. Начало применению этого метода для синтеза оптимальных детерминированных систем следует отнести к работам Н. Г. Четаева, Н. Н. Красовского, В. И. Зубова. Управление выбиралось так, чтобы оптимизировать некоторые свойства функции Ляпунова, характеризующей устойчивость детерминированной системы. С развитием понятия стохастической устойчивости этот метод был обобщен на стохастические системы.

Важным достижением теории оптимальных систем было установление Н. Н. Красовским тесной связи принципа динамического программирования с прямым методом функции Ляпунова и обоснование понятия оптимальной функции Ляпунова. Было показано, что принципу оптимальности и уравнению Беллмана удовлетворяет некоторое множество производящих функций. Однако действительно оптимальное управление и решение задачи дают лишь те из них, которые являются функциями Ляпунова для замкнутой системы. Такие функции, удовлетворяющие уравнению Беллмана, называются *оптимальными функциями Ляпунова*. Управления, найденные по этим функциям, являются оптимальными и придают устойчивость системе.

По существу метод функции Ляпунова дает возможность отобрать нужные решения из тех, которые удовлетворяют уравнению Беллмана. Требование того, чтобы производящая функция удовлетворяла уравнению Беллмана и была еще функцией Ляпунова, является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Объединение этих двух методов позволило обосновать проблему аналитического конструирования управлений /11/, /12/, /13/, /14/, /15/.

Из изложенного следует, что основные математические зависимости для определения оптимального управления методом функции Ляпунова совпадают с соответствующими уравнениями метода динамического программирования. Однако, получаемое решение для производящей функции должно быть положительно определенной убывающей функцией, обращаемой в нуль в начале координат.

Метод функции Ляпунова применяется преимущественно к нелинейным и линейным динамическим системам без ограничений на управления. Формулировка этого метода применительно к нелинейным стохастическим системам стохастического типа содержится в следующей теореме.

Теорема 4.3 *Для нелинейного объекта, описываемого стохастическими уравнениями, при наблюдении на интервале (t_0, t_k) вектора $Z(t)$, квазиоптимальное управление u , минимизирующее функционал*

$$\mathcal{E}_0 = M_z[l_1(Y, t_k)] + M_z \left[\int_{t_0}^{t_k} (L(Y, \tau) + u^T(\tau) K^{-1} u(\tau)) d\tau \right], \quad (118)$$

где $L(Y, t)$, $l_1(Y, t_k)$ – заданные положительно определенные функции, K – симметричная положительно определенная или диагональная матрица положительных коэффициентов, определяется формулой

$$u^{(l)} = -\frac{1}{2} K \left[\sigma^{(l)}(\mathcal{Y}^{(l)}, t)^T \frac{\partial U(\mathcal{Y}^{(l)}, t)}{\partial \mathcal{Y}^{(l)}} \right], \quad (119)$$

где $\mathcal{Y}^{(l)}(t) = M_z[Y(t)]$. Функция $U(\mathcal{Y}^{(l)}, t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left[\frac{\partial U}{\partial \mathcal{Y}^{(l)}} \right]^T A^{(l)} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathcal{Y}^{(l)} \partial \mathcal{Y}^{(l)}} B^{(l)} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial U}{\partial \mathcal{Y}^{(l)}} \right]^T \sigma^{(l)} K \sigma^{(l)} \left[\frac{\partial U}{\partial \mathcal{Y}^{(l)}} \right] = -M_z[L(Y, t)] \quad (120)$$

при граничном условии

$$U(\mathcal{Y}^{(l)}, t_k) = M_z[l_1(Y, t_k)] \quad (121)$$

для терминальной задачи или частным решением, соответствующем правой части этого уравнения, для нетерминальной задачи.

Функционал типа (118) содержит первое слагаемое, оценивающее точность приведения системы в желаемое конечное состояние $Y(t_k) = 0$. Второе слагаемое является интегральной оценкой качества переходного процесса. Третье слагаемое характеризует потери на управление.

Доказательство сформулированной теоремы основывается на применении процедуры метода динамического программирования.

Предположим, что функция $U(\mathcal{Y}^{(l)}, t)$ обладает свойствами функции Ляпунова и удовлетворяет приближенному уравнению Беллмана (115) для данной задачи

$$\min_{\substack{u(\tau) \\ \tau \in (t_0, t_k)}} \left\{ \frac{\partial U(\mathcal{Y}^{(l)}, t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial U(\mathcal{Y}^{(l)}, t)}{\partial \mathcal{Y}^{(l)}} \right]^T A^{(l)} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 U(\mathcal{Y}^{(l)}, t)}{\partial \mathcal{Y}^{(l)} \partial \mathcal{Y}^{(l)T}} B^{(l)} \right] + \right. \\ \left. + M_z[L(Y, t)] + u^T K^{-1} u \right\} = 0. \quad (122)$$

Так как на управление u не наложено никаких ограничений, то для определения минимума выражения в фигурных скобках уравнения (122) следует его продифференцировать по u и приравнять нулю:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{Y}^{(l)}} \right]^T \frac{\partial A^{(l)}}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \text{tr} \left[\frac{\partial^2 U(\mathbf{Y}^{(l)}, t)}{\partial \mathbf{Y}^{(l)} \partial \mathbf{Y}^{(l)T}} \mathbf{B}^{(l)} \right] \right\} + 2u^T K^{-1} = 0. \quad (123)$$

В силу того, что $A^{(l)}$ зависит от u линейно (123), а $B^{(l)}$ от u не зависит (112), уравнение (124) приводится к виду

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{Y}^{(l)}} \right]^T \sigma^{(l)}(\mathbf{Y}^{(l)}, t) + 2u^T K^{-1} = 0. \quad (124)$$

Из уравнения (123) получаем формулу для u (119)

$$u^{(l)} = -\frac{1}{2} K \left[\sigma^{(l)}(\mathbf{Y}^{(l)}, t)^T \frac{\partial U(\mathbf{Y}^{(l)}, t)}{\partial \mathbf{Y}^{(l)}} \right].$$

Подставим теперь найденное оптимальное управление в уравнение Беллмана (124) и учтем, что при оптимальном управлении знак \min_u можно опустить, так как по u проведена оптимизация, получим уравнение (120). Теорема доказана.

Квазиоптимальное управление (119) зависит от заданной матрицы K , матрицы $\sigma^{(l)}$ и частных производных по $\mathbf{Y}^{(l)}$ производящей функции Ляпунова $U(\mathbf{Y}^{(l)}, t)$. Эта функция одновременно является функцией Беллмана. Ее значение при $t = t_0$ характеризует минимальную оценку условного математического ожидания функционала J_0^ϵ (критерия оптимальности).

Указанный в данном параграфе метод оптимизации приводит к аналитическому синтезу оптимальных (для линейных систем) или квазиоптимальных управлений и основан на использовании уравнения Беллмана для стохастической задачи.

Практическое применение находят и другие варианты метода аналитического синтеза статистически квазиоптимальных управлений,

основанные на обобщении решений детерминированных задач и использовании прямых вариационных методов.

6.3 Постановка задачи синтеза

Используем концепцию двух процессов, описанную в /5/, /6/. Тогда внешний процесс будет протекать на рынке и определять виды продукции, пользующиеся спросом. Внутренний процесс (изготовление продукции) будет протекать в ГПС. Согласование этих двух процессов приведет к изготовлению продукции, наиболее выгодной при эксплуатации данной ГПС.

Итак, имеется M видов продукции, цена на которые на рынке превышает расчетную себестоимость ее изготовления в проектируемой ГПС. Необходимо при заданных затратах K выбрать технологические структуры, изготавливающие продукцию, приносящую наибольшую прибыль от эксплуатации ГПС, то есть максимизирующие критерий (40). При этом необходимо учитывать возможность перекрытия структур с помощью коэффициентов перекрытия c_{ij} , перераспределения управляющих ресурсов (в соответствии с вышеописанной задачей), приводящую к общему уменьшению потерь за счет уменьшения дисперсии – $b_i \Delta D$ и ограниченную покупательную способность рынка, а также ограничения, вносимые существующей технологией. Обсудим последние ограничения более подробно. Как видим из постановки задачи синтеза, он тесно привязан к текущему состоянию рынка, что отсутствовало в прежних существующих решений задач синтеза с подробным рассмотрением технических вопросов синтеза ГПС /16/.

6.4 Выявление ограничений

Модель, включающая номенклатуру и объемы продукции, рассматривалась в экономике /17/. При этом использовалась критериальная функция вида

$$\sum_{v=1}^L \sum_{i=1}^n C_i X_{iv}^{\tau} \rightarrow \min, \quad (125)$$

где C_i - оптовая цена i –го заказа;

X_{iv}^{τ} - признак включения i –го заказа в τ – ый период;

v – признак приоритетности выполнения i –го заказа

при следующих ограничениях:

1) по пропускной способности:

$$\sum_{v=1}^L \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m t_{ij} X_{iv}^{\tau} \leq K_{nl}^{загр} \Phi_j^{\tau}, \quad (126)$$

где t_{ij} - трудоемкость изготовления заказа i –го вида по j – ой технологической структуре;

Φ_j^{τ} - полезный фонд времени работы по j – ой технологической структуре в τ – ом плановом периоде;

$K_{nl}^{загр}$ – плановый коэффициент загрузки оборудования;

2) по объему выпуска:

$$\sum_{v=1}^L \sum_{i=1}^n C_i X_{iv}^{\tau} \geq C_{nl}^{\tau}, \quad (127)$$

где C_{nl}^{τ} – программа выпуска заказов за τ – ый период планирования;

3) по признаку включения заказов в программу:

$$X_{iv}^{\tau} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ый заказ включен в } \tau\text{-ый плановый период,} \\ 0 - \text{ в противном случае;} \end{cases} \quad (128)$$

4) по ресурсам (металлу):

$$\sum_{\varphi=1}^M \sum_{v=1}^L \sum_{i=1}^n M_{i\varphi}^H X_{iv}^{\tau} \leq M_{i\varphi}^{\tau}, \quad (129)$$

где $M_{i\varphi}^H$ – норма расхода φ – го металла на i – ый заказ;

$M_{i\varphi}^{\tau}$ – наличный объем φ – го металла;

5) по заработной плате:

$$\sum_i \sum_j \sum_v \sum_\psi P_{ij\psi} t_{ij\psi} X_{iv}^\tau \leq Z_n^\tau, \quad (130)$$

где $P_{ij\psi}$ – расценка;

$t_{ij\psi}$ – разряд;

Z_n^τ – норматив заработной платы.

Однако в этой модели затраты на организацию производства продукции рассматриваются как общее ограничение и не участвуют в формировании значения целевого критерия. Кроме того, не учитываются вероятностный характер дохода, а также эффекты от эмерджентных свойств метасистемы и связанный с ними вид подключения технологических структур к ГПС. Обсудим эти вопросы подробнее.

Ясно, что уже на этапе проектирования автоматизация должна быть рассчитана на производство продукции с максимальной прибылью.

Проведем вероятностную оценку прибыли от текущей реализации продукции. Вероятность того, что скалярный марковский случайный процесс $\xi(t, \omega)$ (колебания цены на продукцию на рынке) в течение интервала времени (t, τ) превзойдет значение ее себестоимости для данной ГПС, определяется равенством

$$P(\tau) = \int_{C_l}^{\infty} W^l(\tau, y) dy \quad l = 1, \dots, s, \quad (131)$$

где $W^l(\tau, y)$ – условная функция плотности вероятности, y – значения цены, C_l – себестоимость данного вида продукции, s – количество видов продукции (ассортимент), учитываемых при расчете. Тогда средняя величина превышения цены над себестоимостью определится интегралом

$$\Delta U_{cp} = \int_{C_l}^{\infty} y W^l(\tau, y) dy \quad l = 1, \dots, s, \quad (132)$$

Поскольку процесс считается марковским, условная функция плотности вероятности удовлетворяет уравнению Фоккера - Планка – Колмогорова (ФПК).

Считая переменную цену подчиняющейся стохастической модели состояния в форме Стратоновича

$$\begin{cases} d\xi(t, \omega) = -\alpha\xi(t, \omega)dt + m^2 dw(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) = x_0, \end{cases}, \quad (133)$$

где $w(t, \omega)$ - винеровский случайный процесс, α, m^2 – параметры модели, приходим к необходимости решения следующей смешанной задачи для уравнения ФПК

$$\begin{cases} \frac{\partial W^l(\tau, y)}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial}{\partial y} (y W^l(y, \tau)) + \frac{m^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} W^l(y, \tau); \\ W^l(0, y) = \delta(y); \\ W^l(\tau, C_l) = W^l(\tau, \infty) = 0. \end{cases} \quad (134)$$

Решение данной задачи проведено в [6] и выражается через функцию параболического цилиндра $D_\nu(z)$. Подставляя его в формулу (3.13), получим

$$\Delta\Pi_{cp} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \exp\left(-\frac{\alpha\nu_k\tau}{2}\right) \int_{C_l}^{\infty} y \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{2m^2}\right) D_\nu\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{m} y\right) dy, \quad (135)$$

где ν_k - корни уравнения $D_\nu(\sqrt{2\alpha C_l}/m^2) = 0$, а нормирующий множитель вычисляется по формуле

$$c_k = \left(\int_{C_l}^{\infty} D_{\nu_k}^2\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{m} y\right) dy \right)^{-1/2}, \quad k = 1, 2, K \quad (136)$$

Определим теперь среднее время пребывания цены на продукцию в области превышения над себестоимостью. Пусть $f_\rho(z)$ - функция плотности вероятности времени пребывания скалярного марковского процесса в заданной области. Если в момент времени τ значения рассматриваемого случайного процесса (цены на продукцию) еще ни разу не достигали границ

области, то время ρ их пребывания там будет не менее чем $\tau - t$. Вероятность реализации этого события равна

$$\int_{\tau-t}^{\infty} f_{\rho}(z) dz. \quad (137)$$

С другой стороны, эта же вероятность определяется через плотность вероятности

$$\int_{\tau-t}^{\infty} f_{\rho}(z) dz = \int_{C_l}^{\infty} W^l(\tau, y) dy \quad (138)$$

Таким образом,

$$f_{\rho}(z) = -P'(\tau)|_{\tau=t+z} = - \int_{C_l}^{\infty} \frac{\partial W^l}{\partial \tau} |_{\tau=t+z} dy. \quad (139)$$

Математическое ожидание времени пребывания процесса в заданной области

$$\bar{\rho}_l = \int_0^{\infty} z f(\rho) dz = \int_t^{\infty} P(\tau) d\tau. \quad (140)$$

Для того момента, когда значения случайного процесса достигают границы допустимой области, функция $W(t, y)$ является решением первого уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial W^l}{\partial t} - \alpha y \frac{\partial W^l}{\partial y} + \frac{1}{2} m^2 \frac{\partial^2 W^l}{\partial y^2} = 0. \quad (141)$$

Заменив в этом уравнении производную W_t' на $-W_{\tau}'$ и проинтегрировав его по переменному y в пределах от C_l до ∞ с учетом равенства (131), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\alpha y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} m^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}. \quad (142)$$

Так как, согласно определению вероятности $P(\tau)$, имеют место равенства

$$P(t) = 1, \quad P(\infty) = 0, \quad (143)$$

то, после интегрирования этого уравнения по τ в пределах от t до ∞ в соответствии с вышеописанным равенством, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно $\bar{\rho} = \bar{\rho}(y)$ с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m^2 \bar{\rho}_l''(y) + \alpha y \bar{\rho}_l'(y) + 1 = 0, \\ \bar{\rho}_l(C_l) = \bar{\rho}_l(\infty) = 0. \end{cases} \quad C_l < y < \infty, \quad (144)$$

Решая эту краевую задачу, находим

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_l(y) &= \frac{2}{m^2} \int_{C_l}^y \left(C - \int_{C_l}^z \exp\left(-\frac{\alpha z^2}{m^2}\right) dz \right) \exp\left(\frac{\alpha y^2}{m^2}\right) dy, \\ C &= \left(\int_{C_l}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha y^2}{m^2}\right) dy \right)^{-1} \int_{C_l}^{\infty} \int_{C_l}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{m^2}(y^2 - z^2)\right) dz dy. \end{aligned} \quad (145)$$

Оценим теперь среднее число выбросов значений марковского процесса за данный уровень. Рассмотрим временной интервал $(t, t+\Delta t)$. Поскольку его длина не зависит ни от τ , ни от y , то функция вероятности того, что значения процесса не опустятся ниже уровня C_l , должна удовлетворять уравнению ФПК

$$\frac{\partial v(\tau, y)}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (m^2 v(\tau, y)) = 0. \quad (146)$$

Начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} v(\tau, y)|_{\tau < t} &= 0, \\ v(\tau, C_l) &= \delta(\tau - t) f(t, C_l), \end{aligned} \quad (147)$$

где $f(t, y)$ - функция плотности вероятности в заданный момент времени t .

Число выбросов $n(C_l, \rho_0)$, длительность которых не меньше заданной величины ρ_0 (времени одной купли-продажи единицы данной продукции), определяется

$$n(C_l, \rho_0) = \int_{C_l}^{\infty} v(\rho_0, y) dy. \quad (148)$$

Решение поставленной краевой задачи найдено в /6/ с помощью преобразования Лапласа при условии, что случайный процесс является стационарным в широком смысле

$$f(y) = \frac{\sqrt{\alpha}}{m\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{m^2}\right), \quad (149)$$

В отображениях по Лапласу для искомого числа выбросов получаем

$$N(C_l, s) = \frac{\sqrt{\alpha}}{m\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha C_l^2}{m^2}\right) \left(-\frac{\alpha C_l}{s} - \frac{m^2}{2s} \frac{\partial}{\partial y} \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{2m^2}\right) \frac{D_{-s/\alpha}(y/\alpha)}{D_{-s/\alpha}(C_l)} \Big|_{y=C_l} \right). \quad (150)$$

Обращая найденное выражение, можно найти среднее число выбросов данной продукции за уровень себестоимости.

Тогда средний доход от реализации можно найти, перемножая найденные средние величины превышения цены над себестоимостью на длительность этого превышения и на их частоту

$$D_l = \Delta C_{cp} \bar{\rho}_l n(C_l, \rho_0), \quad (151)$$

Полученный доход должен быть умножен на долю проектируемой ГПС в зависимости от ее производительности и обеспечиваемого качества и отнесен к затратам, которые необходимы для организации производства данной продукции в течение единицы времени (года)

$$\eta_1 = \frac{D_1 \Phi(p, q)}{K(p, q)}. \quad (152)$$

6.5 Исследование альтернативы параллельности и последовательности

Вопрос о параллельности двух процессов решается из следующих сооб-

Цена на продукцию



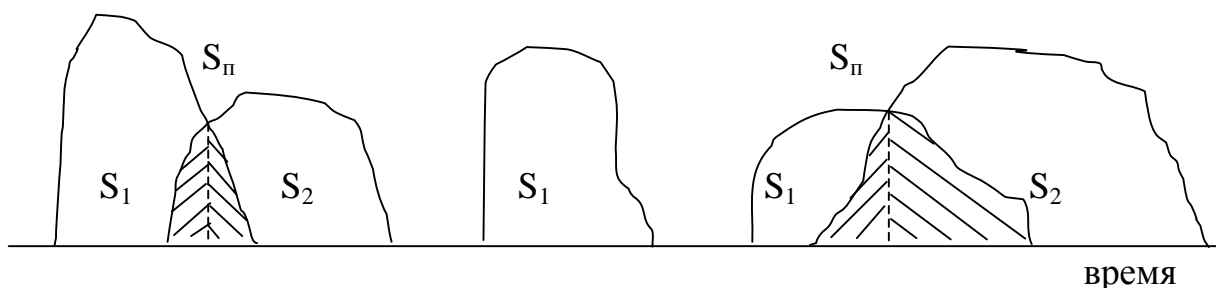


Рисунок 14 – Схема перекрытия внешних процессов

ражений. На рисунке 14 изображены колебания цен на продукцию двух видов.

Как видно, имеется заштрихованное перекрытие этих двух процессов. Обозначим S_1 , S_2 – доходы, получаемые от реализации продукции первого и второго вида соответственно, S_n – «перекрывающийся» доход и K_1 , K_2 – соответствующие затраты. При вычислении коэффициента удельного эффекта в метасистеме последовательного действия (как следует из рассуждений об эмерджентности свойств мультиструктурной системы в предыдущей главе) необходимо уменьшить затраты на величину перекрытия по структуре. А для мультиструктурной системы параллельного действия следует увеличить эффект на долю, обусловленную «суммарным» уменьшением дисперсии управляемых величин (последнее эквивалентно добавлению управляющих ресурсов). Знак разности коэффициентов удельного эффекта для этих двух мультиструктурных систем определит, в каком режиме надо подключать к первой из них вторую (при последовательном разность должна быть положительной, при параллельном – отрицательной). Определим искомую разность

$$\Delta = \frac{S_1 + S_2 - S_n}{K_1 + K_2 - c_{21}K_2} - \frac{S_1 + S_2 + bS_n}{K_1 + K_2}, \quad (153)$$

где c_{21} – коэффициент перекрытия второй структурой первой;

b – коэффициент увеличения эффекта от совместного взаимодействия структур.

Знак этой разности зависит только от числителя, так как $c_{21} \leq 1$.
Производя сокращения в числителе, получим

$$c_{21}K_2(S_1 + S_2) + c_{21}K_2bS_n - S_n(K_1 + K_2) - bS_n(K_1 + K_2), \quad (154)$$

Как видно из этого результата, превышение суммы первого и второго слагаемых над суммой третьего и четвертого ведет к преимуществу последовательного присоединения второй структуры к первой и наоборот.

Вычисляя суммарный коэффициент удельного эффекта (в зависимости от вида присоединения он будет вычисляться по-разному), можно провести точно такие же рассуждения для последующих присоединяемых структур.

6.6 Алгоритм синтеза метасистемы

Выбранный критерий не позволяет решить задачу синтеза аналитически, поскольку процедура синтеза подразумевает пробные шаги в разных направлениях и дополнительно зависит от порядка этих шагов. Это означает, что теряется свойство марковости и задачу можно решить разработкой поискового алгоритма.

Процесс поиска состоит из повторяющихся этапов, каждый из которых представляет собой переход от одного решения к другому, лучшему, что и образует процедуру последовательного улучшения решения в смысле максимизации критерия

$$Q(L, W, C) \rightarrow \max_{W, C \in S} \Rightarrow W_{on}, C_{on}, \quad (155)$$

где множество S образовано условиями удовлетворения заданной системы неравенств, накладываемых на функционирование системы в условиях L ,

а W_{on} и C_{on} – оптимальный набор структур и параметры в этих условиях.

Итак, алгоритм образует последовательность шагов /16/:

$$U[0] \rightarrow U[1] \rightarrow \dots U[N] \rightarrow U[N+1] \rightarrow \dots \quad (156)$$

В этой последовательности каждое последующее решение в определенном смысле лучше, предпочтительнее предыдущего, то есть

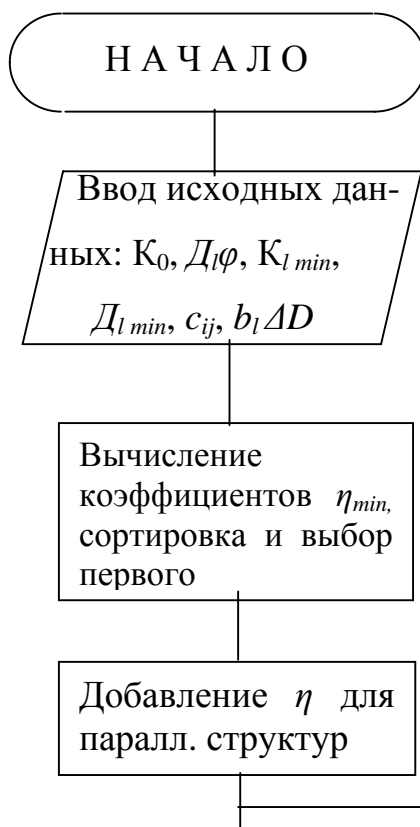
$$U[N+1] \phi U[N], \quad N = 0, 1, \dots \quad (157)$$

Здесь смысл знака предпочтения « ϕ » может быть разным. Например, если $U[N+1], U[N] \in S$, то (77) означает, что $Q(U[N+1]) > Q(U[N])$. Если $U[N] \notin S$, то предпочтение (77) естественно связать с выполнением условия $U[N] \in S$.

В нашем случае роль варьируемых параметров могут играть производительность по каждому виду продукции и уровень его качества.

Задаваясь начальным возможным качеством и производительностью при минимальном шаге по затратам, можно выбрать необходимый набор технологических структур в обобщенной ГПС по следующему алгоритму, поясняемому дополнительно рисунками 16, 17.

1 Вычислить все коэффициенты удельного эффекта для множества возможных видов продукции M в предположении объема затрат K_0 по формуле (72), расположить их в порядке убывания.



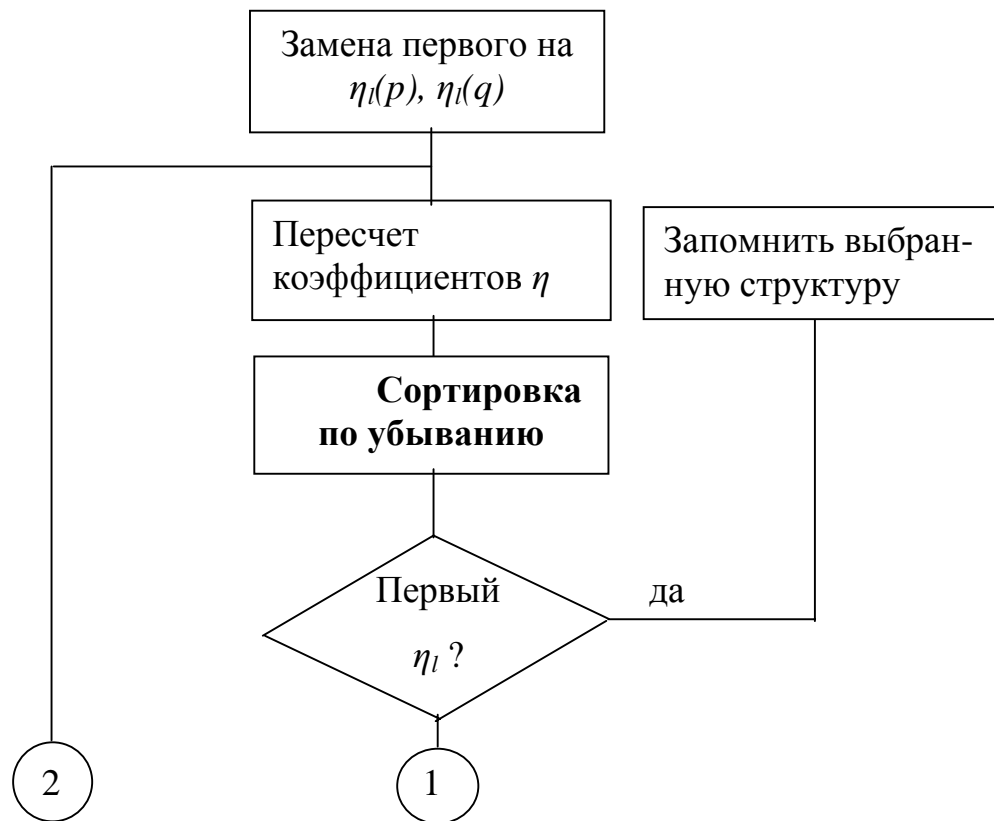
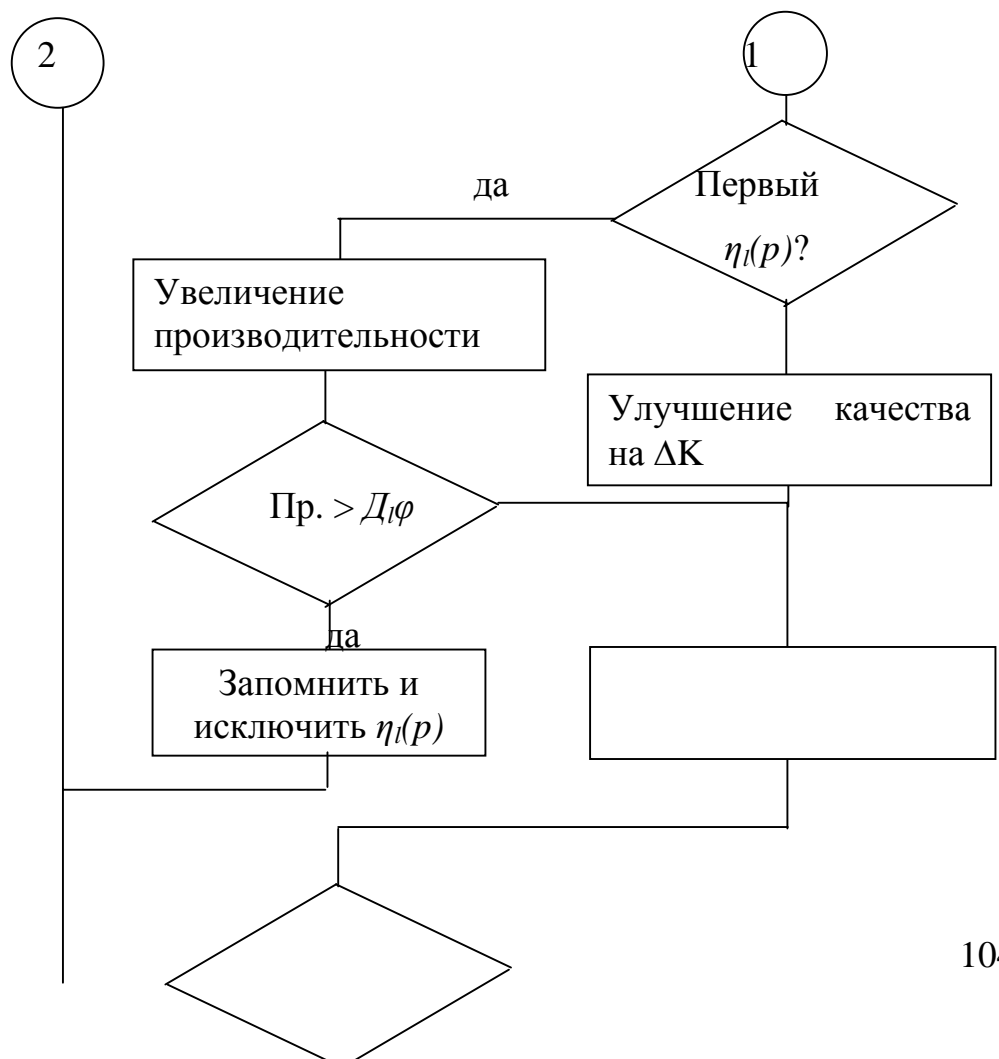


Рисунок 16, лист 1 – Алгоритм выбора технологических структур



нет

$$K - \Delta K < 0$$

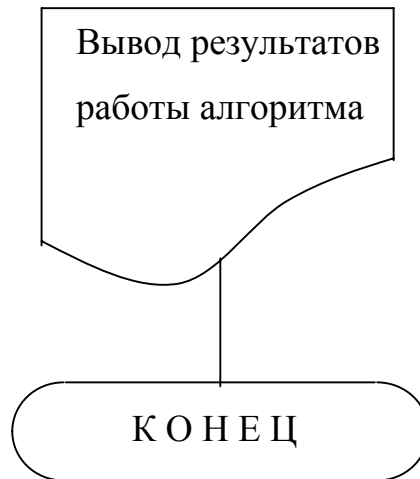


Рисунок 16, лист 2

2 Выбрав вид продукции с первым коэффициентом, заменить его на два других, связанных с эффектами от расширения данного вида продукции и улучшения его качества, вычисленных по формулам

$$\eta_1(p) = \eta_1(p) + \frac{\partial \eta_1}{\partial p} \frac{dp}{dK} \Delta K \quad \text{и} \quad \eta_1(q) = \eta_1(q) + \frac{\partial \eta_1}{\partial q} \frac{dq}{dK} \Delta K;$$
$$\frac{\partial \eta_1}{\partial p} \frac{dp}{dK} = \alpha_1; \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial q} \frac{dq}{dK} = \alpha_2. \quad (158)$$

3 Пересчитать все коэффициенты удельного эффекта, учитывая при этом перекрытия с выбранной технологической структурой (при последовательном присоединении) в смысле общих затрат (одно и то же технологическое или транспортное оборудование, управление, программы и так далее) и уменьшая их затраты на величину перекрытия.

4 Добавить к ним коэффициенты, учитывающие возможность перераспределения управляющих ресурсов в случае параллельного подключения к выбранной технологической структуре.

5 Отсортировать полученный ряд коэффициентов в порядке убывания.

6 Если первый коэффициент рассчитан для нового вида продукции с последовательным (параллельным) присоединением, то добавить новую технологическую структуру и перейти к пункту 2.

7 Если первый коэффициент рассчитан в предположении увеличения производительности по уже выбранному виду продукции, увеличить производительность из расчета увеличения затрат на ΔK . В противном случае перейти к пункту 10.

8 Проверить, не превышает ли новая производительность потребности рынка. Если да, то исключить данный коэффициент из ряда и перейти к пункту 2.

9 Проверить, не превысили ли затраты заданной величины K_0 . Если да, то закончить работу алгоритма, распечатав при этом результаты. В противном случае перейти к пункту 3.

10 Пересчитать первый коэффициент в предположении увеличения качества данного вида продукции при увеличении затрат на его достижение на ΔK и перейти к девятому пункту.

В результате работы этого алгоритма выбираются виды продукции с самыми быстрыми сроками окупаемости, определяется необходимое оборудование с учетом перекрытия технологических структур, уточняется производительность ГПС по каждому виду продукции, необходимое качество каждого вида продукции и порядок работы отдельных структур – параллельный или последовательный.

7 Пример структурного синтеза ГПС

Задание: Для заданных четырех технологических цепочек ГПС:

- 1) выяснить режим функционирования пятой: независимый либо совместный другими цепочками ГПС;
- 2) определить предельное значение S_n , при котором меняется этот режим.

- 3) определить целесообразность подключения пятой цепочки;
- 4) пользуясь описанным алгоритмом, определить оптимальные значения качества и производительности для пятой цепочки.

Для всех вариантов задаются пять значений коэффициентов удельного эффекта: 0.75; 0.56; 0.44; 0.31, коэффициент перекрытия: $c_{12} = c_{21} = 0.3$. Считается, что коэффициент эффективности совместной работы для всех систем одинаковый: $b = 0.2$.

Кроме того, для рассматриваемого варианта имеем:

$K_1=150000$; $K_2 = 170000$; $S_1 = 12000$; $S_2 = 15000$; $S_n = 7000$; $\varphi_2 = 0.5$; $K_0 = 10000$; $\Delta K=1000$; $\alpha_2 = 10^{-4}$.

Подставляя необходимые значения в формулу (74), получаем

$$0.3*170000*27000 + 0.3*17000*0.2*7000 - 7000*320000 - 0.2*7000*320000 = -123.96*10^7$$

Это означает, что параллельный способ подключения выгодней

Приравнявая формулу (74) к нулю, находим критическое значение перекрытия

$$S_n = \frac{c_{21}K_2(S_1 + S_2)}{(1+b)(K_1 + K_2) - c_{21}K_2b} = 3683.7881$$

Наконец, принимая $D_l = S_2$, подсчитываем коэффициент удельного эффекта

$$\eta = \frac{S_2\varphi_2}{K_2} = \frac{15000*0.5}{170000} = 0.044,$$

Подключать эту технологическую цепочку явно не выгодно, поэтому необходимо увеличить ее производительность либо качество по описанному алгоритму. Уже на третьем шаге получаем необходимую для включения технологической цепочки в ГПС производительность с коэффициентом удельного эффекта

$$\eta = 0.344.$$

8 Задания для расчетно-графической работы

Численные значения параметров сведены в таблицу 1

Таблица 1 – Варианты заданий

№ вар	φ_2	K_1 руб	K_2 руб	S_1 руб	S_2 руб	S_{Π} руб	c_{21}	α_2 руб ⁻¹	ΔK
1	0.1	110000	165000	11000	30000	6500	0.12	0.0001	1200
2	0.25	187000	176000	16000	12300	3300	0.31	0.0006	800
3	0.37	99000	143000	23000	27100	7200	0.22	0.0015	1500
4	0.18	125000	157000	17000	13200	2100	0.18	0.0003	2000

Продолжение таблицы 1

№ вар	φ_2	K_1 руб	K_2 руб	S_1 руб	S_2 руб	S_{Π} руб	c_{21}	α_2 руб ⁻¹	ΔK
5	0.44	154000	132000	13000	21600	3400	0.15	0.0005	970
6	0.6	108000	111000	25000	24300	5200	0.23	0.0012	1020
7	0.27	173000	124000	12000	30500	7100	0.33	0.0007	1430
8	0.33	156000	112000	21000	23400	2300	0.11	0.0011	1100
9	0.15	93000	177000	18000	27100	1500	0.32	0.0004	1700
10	0.09	138000	96000	14000	11200	4500	0.27	0.0008	1210
11	0.56	161000	136000	24000	17600	5200	0.19	0.0014	980
12	0.48	112000	147000	11500	13200	5500	0.13	0.0013	1310
13	0.23	123000	172000	22500	22300	3700	0.27	0.0002	1680
14	0.62	184000	103000	14000	24600	3300	0.14	0.0009	1990
15	0.43	127000	144000	20000	27800	2700	0.17	0.001	990
16	0.22	105000	106000	14500	23100	5400	0.22	0.0013	1320
17	0.29	103000	127000	18900	17400	3400	0.29	0.0005	1330
18	0.51	172000	184000	13300	15400	6400	0.16	0.0004	2100
19	0.21	147000	123000	23400	18700	2400	0.13	0.0001	1800
20	0.38	136000	117000	21500	23200	7100	0.3	0.0002	1430

21	0.45	96000	161000	10500	27500	8000	0.25	0.0007	1500
22	0.49	177000	98000	18700	13200	1800	0.14	0.0014	970
23	0.17	112000	138000	17400	27600	2900	0.17	0.0011	1100
24	0.26	124000	99000	20900	29900	3900	0.18	0.0006	1540
25	0.58	111000	187000	11100	22700	7700	0.12	0.0004	1430
26	0.41	132000	110000	17600	15300	2200	0.22	0.0008	1020
27	0.29	157000	173000	13500	12700	5500	0.31	0.0011	1780
28	0.14	143000	108000	23400	13100	5700	0.28	0.0013	1210
29	0.43	176000	154000	21300	26500	4600	0.17	0.0014	1170

Список использованных источников

- 1 Основы проектирования роботизированных технологических комплексов: Учебное пособие.- Л. ЛПИ. 1988.- 88 с.
- 2 Абдрашитов Р.Т. Методы синтеза оптимальных автоматических систем управления сельскохозяйственными технологическими процессами. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук.- Минск, 1980. - 408 с.
- 3 Кузнецов и др. Автоматизация производственных процессов. - М.:Высшая школа. 1978.-431 с.
- 4 Клир Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач. - М.: Радио и связь, 1990.-544 с.
- 5 Пищухин А.М. Автоматизация на основе мультиструктурных систем /Научное издание. – Оренбург: ОГУ, 2001.-258 с.
- 6 Пищухин А.М. Оптимальные методы построения и управления мультиструктурными системами автоматизации технологических процессов и производств на основе вероятностных критериев качества. // Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук.-Оренбург-2001.- 338с.
- 7 Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. – М.:Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999.- 448 с.
- 8 Беллман Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960.-320с.
- 9 Tchamran A. On bellmans functional equation and a class of time optimal control systems.-J. Of the Franclin Inst., 1965, v.280, № 6, pp.34-41.
- 10 Стратонович Р.Л. К теории оптимального управления. Достаточные координаты // Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXIII, №7. С. 910-917.
- 11 Wonham W.M. Stochastic problems in optimal control.- RIAS Techn. Report, 1964, v. 1, pp. 63-64.
- 12 Зубов В.И. Теория оптимального управления.- Л.: Судпромгиз, 1966.- 215 с.

13 Красовский Н.Н., Летов А.М. К теории аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика.-1962.-т. XXIII.- №6.- С. 11-18.

14 Красовский Н.Н. Теория управления движением.- М.: Наука, 1968.- 322 с.

15 Летов А.М. Динамика полета и управление.- М.: Наука, 1969.-214 с.

16 Бондаренко В.А., Сердюк А.И. Основы создания ГПС механообработки: Учебное пособие. – Оренбург, Оренбургский государственный университет, 2000. -206 с.

17 Зеленцова Л.С. Оперативное планирование производства в условиях рынка. – Оренбург: ОГУ,- 2000 .-161 с.